“わかる”を数指導の目標に据えるとき——その指導内容は？

金沢大学教育学部　　宮　下　英　明

数を“使う”ことは，易しいとは言えなくとも，すごく難しいことではありません。しかし，これを“理解”することはかなり難しい。実際，カラダが実践している“数”をアタマに理解させようとすると，それは大学数学レベルの概念になります。

数は，人間以前に存在しているわけではありません。数はひとの実践の形式です。もっと厳密に言えば，ひとの実践の形式として対象化し得るところのものです。

ひとの実践の形式として数を対象化し得るということは，ひとが現に数をそのように対象化しているということを意味しません。やっていることは，必ずしも考えた結果ではありません。あることの考えがなくとも，カラダはそのことをし得るのです。アタマに従ってカラダが動くというわけではない。カラダの方がアタマよりも先を行っている。

“できる”と“わかる”が区別されて言われることがよくありますが，“できる”と“わかる”はそれぞれここで言う“カラダ”と“アタマ”に対応するでしょう。

“わかる”を数指導の目標に据えることは，はっきり申しますが，挑戦です。余程の根性と甲斐性があなたになければ，それはできません。

“できる”の方は，まあ何とかなるでしょう。“わかる”無しで“できる”に到達することはできます。実際，“できる”を導くのは“わかる”である必要はありません。ウソからマコトを生じさせることもできるのです。

問題は，あなたがウソ(方便)をウソ(方便)として承知して指導しているか，マコトが何かを承知して指導しているかです。承知していればそれでよいのです。そのときには自らの主義の下に指導していることになるわけですから，あなたのやり方は尊重されるべきです。

“わかる”に対して“できる”を否定的なニュアンスで言う人がいますが，それは態度として誤りです。意味に拘泥する人は，概して，はた迷惑なものです。(因にわたし自身は，商売柄，意味に拘泥しちゃう方ですが。)

わたしはここで子どもの側の“わかる”を強調しようというのではありません。そんな気持ちはさらさらありません。ただ，教師の側の自覚無しでしてしまうインチキな指導を否定したいのです。

さて，ここまで何だかんだ言いながら，“わかる”べき対象としての数がどのようなものになるかということは，全然述べてきませんでした。以下これを述べていくことにします。数指導の目標に“わかる”を据えることがどれ程の挑戦であるかわかってもらえると思います。

算数では，数として“整数”，“分数”，“小数”が登場します。但し，分数，小数は，一つの数形式の二つの異なる<u>表現</u>形式のことで，その数形式の名は“有理数”です。

1. 整　数

整数はこの場合0以上の整数ですが，実践形式としての整数は“系列”です。系列とは

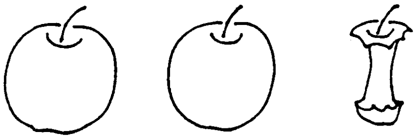
{はじめ，はじめのつぎ，はじめのつぎのつぎ，…}

の形式のことです。この系列は，中国語では{一,二,三,…}となり，英語では{one, two, three, …}となります({zero, one, two, three, …}の場合もあります)。

系列の意味には，“二つの項は互いに異なる”が含意されています。そこで，系列は識別のための標識に用いることができます。例えば，背番号。

また，系列の形式は，計数にも流用することができます。ここで“計数”とは，単位の反復

の数え上げのことです。単位は“単位”と見なされたもののことであり，“単位”とみなすのは恣意です。例えば，



を“３個”とするのと“２個”とするのでは，考えている単位が異なるわけです。

2. 有理数

“有理数”は“rational number”の訳です。即ち，“rational”を“有理”の意味に解したわけです。しかし，“rational”の“ratio”の意味は“比”であり，“有理数”は文字通りには“比数”です。そして実際“有理数”は正しく“比数”のことなのです。

“比”は、二量の比のことです。ここで“量”もまたひとの一つの実践形式ということになるのですが，話が込み入ってしまいますので，量についてはいまは詮索しないことにします。

二量 a，b に対し例えば

$a = u + u$　　　　　（ u の２回の累加）

$b = u + u + u + u + u$（ u の５回の累加）

となるような量 u が存在するとき，a と b の比は２：５であると言います。これは，

$a + a + a + a + a = b + b$

（（ a の５回の累加）＝（ b の２回の累加））

のように定義しても同じことです。

この“比”からは“倍”の読みが導かれます。実際，例えば“量 a と量 b の比は2：5”の言い換えとして“ a の$\frac{5}{2}$倍は量 b ”の言い回しを導きます。

小数は，比(倍)のもう一つの表現形式です。例えば，“量 a の 2.5 倍が量 b とは，a を規準にしてつくった系列

$\{\cdots, a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots\}$

$a_0 = a$，

a_{i+1} は a_i の10回の累加

に対して，

$b = a_0 + a_0 + a_{-1} + a_{-1} + a_{-1} + a_{-1} + a_{-1}$

（（ a_0 の２回の累加）＋（ a_{-1} の５回の累加）

となるということです。いまは十進小数の場合でしたが，これは n 進小数に一般化されます。

いま，

$b = a + a + a$（ a の３回の累加）

だとしましょう。この場合，b は a の$\frac{3}{1}$倍であり（量 u として a 自身をとる），また一方，b は小数３に関して a の３倍です。そこで，整数３に関する“ a の３倍”を a の３回の累加のことと定義することにすれば，“整数３に関する３倍”は“$\frac{3}{1}$倍”と“小数３に関する３倍”のそれぞれと同じです。そしてこの意味で，整数を有理数と見なせることになります。即ち，整数３は分数$\frac{3}{1}$あるいは小数３として有理数と見なされます。整数は有理数の特殊ということになり，逆に，有理数は整数の拡張ということになります。

3. 倍の図式

二量 a，b と有理数 α に関する“ a の α 倍が b ”を，ここで

$$a \times \alpha = b$$

と書くことにしましょう。即ち，量に対する数の倍の記号として $\times$ を用いることにして，量をこの記号の左に，数を右にそれぞれ配するわけです。またこれを図式

$$a \xrightarrow{\alpha} b$$

で表わすことにしましょう。

この表現を用いるとき，分数倍，例えば$\frac{5}{2}$倍

$$a \xrightarrow{\frac{5}{2}} b$$

の意味は，つぎのようになります。即ち，

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "5"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

となる量 u が存在すること，あるいは

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "5"'] & & b \arrow[dl, "2"] \\ & v & \end{tikzcd}$$

となる量vが存在すること。

いまα倍の逆倍をα^{-1}で表わすことにします。このとき上の二つの図式はそれぞれ

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr, "5"] & \\ a \arrow[ur, "2^{-1}"] & & b \end{tikzcd} \quad \text{および} \quad \begin{tikzcd} a \arrow[dr, "5"'] & & b \\ & v \arrow[ur, "2^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

と同じです。そしてこれが“$\frac{5}{2}$倍”に対するわれわれの通常の読み方になっています(“aの2等分の5つ分がb”および“aの5つ分の2等分がb”)。

以上の図式をひとつにひっくるめて

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, shift left, "2"] \arrow[dr, "5"] & \\ a \arrow[ur, shift left, "2^{-1}"] \arrow[rr, dash, "\frac{5}{2}"] \arrow[dr, "5"'] & & b \arrow[dl, shift left, "2"] \\ & v \arrow[ur, shift left, "2^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

を“$\frac{5}{2}$倍”のトータルな図式としてここで提示しておきます。

4. 量測定

量xの測定は，単位として考えている量uに対して

$$u \xrightarrow{\alpha} x$$

となる倍αを求める実践のことです。このときのαがxの(単位uに対する)“測定値”です。

5. 有理数の表現の同値

われわれが有理数を扱うときには，有理数の表現を扱っています。そしてこのとき，“表現の同値”ということがしばしば問題になります。

小数表現では，有理数と表現の関係は1対1です。しかし，分数表現では1対多です。例えば，倍：

$$a \xrightarrow{\alpha} b$$

が構造

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "3"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

をもつとき，αは分数$\frac{3}{2}$に表現されるわけですが，この構造は任意の整数$n > 0$に対して

$$\begin{tikzcd} & u \times n^{-1} \arrow[d, "n"] \arrow[dl, bend right, "n \times 2"'] \arrow[dr, bend left, "n \times 3"] & \\ a & u \arrow[l, "2"'] \arrow[r, "3"] & b \end{tikzcd}$$

の構造を導き，このとき$\frac{n \times 3}{n \times 2}$が$\alpha$の表現になります。

小数表現と分数表現の同値については，紙数の都合上，話を割愛します。

6. 有理数の順序関係(大小関係)

有理数α_1，α_2に対し

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ y_1 & & y_2 \end{tikzcd}$$

のとき，$y_1 < y_2$であれば$\alpha_1 < \alpha_2$と定めることにします。但し，y_1とy_2の大小関係は，ある量uに対して

$$y_1 = u \times n_1, \quad y_2 = u \times n_2$$
$$n_1, \ n_2 \ : \text{整数}$$

のとき，$n_1 < n_2$であれば$y_1 < y_2$と定めるものとします。

α_1とα_2の大小関係をわたしたちが判定するときは，それはα_1，α_2それぞれの表現に対してです。

二つの小数表現に対しては，$y_1 = u \times n_1$，$y_2 = u \times n_2$となる量uと整数n_1，n_2を直接得ることができます。しかし，分数ではそうはいきません。このときにはどうするか。

例として$\frac{3}{4}$と$\frac{5}{6}$の大小関係を考えることにしましょう。

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "\frac{3}{4}"'] \arrow[dr, "\frac{5}{6}"] & \\
y_1 & & y_2
\end{tikzcd}$$

$\frac{3}{4}$と$\frac{5}{6}$の定義から

$$\begin{tikzcd}
u_1 \arrow[dd, "3"'] \arrow[dr, "4"] & & u_2 \arrow[dl, "6"'] \arrow[dd, "5"] \\
& x \arrow[dl, "\frac{3}{4}"] \arrow[dr, "\frac{5}{6}"'] & \\
y_1 & & y_2
\end{tikzcd}$$

となる量u_1, u_2が存在します。このu_1, u_2は，どちらもy_1とy_2を共約する量ではありません。しかし，u_1とu_2を共約する量はすべてy_1とy_2を共約する量になります。そして例えば

$$u = u_1 \times 3^{-1} = u_2 \times 2^{-1}$$

がこのような量の一つになります。実際，

$$y_1 = (u \times 3) \times 3 = u \times (3 \times 3) = u \times 9$$
$$y_2 = (u \times 2) \times 5 = u \times (2 \times 5) = u \times 10$$

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] \arrow[d, "12"] \arrow[ddl, bend right=60, "{3\times3 \atop =9}"'] \arrow[ddr, bend left=60, "{2\times5 \atop =10}"] & \\
u_1 \arrow[dd, "3"'] \arrow[r, "4"] & x \arrow[ddl, "\frac{3}{4}"] \arrow[ddr, "\frac{5}{6}"'] & u_2 \arrow[l, "6"'] \arrow[dd, "5"] \\
& & \\
y_1 & & y_2
\end{tikzcd}$$

この結果$y_1 < y_2$ですから$\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ ということになります。

ここで上の図式を改めて見てみましょう。uの導入によって，

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{9}{12}, \quad \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{2 \times 6} = \frac{10}{12}$$

が得られています。この等式変形の意義は，同分母分数にするということです。そして$\frac{3}{4}$と$\frac{5}{6}$の大小関係が同分母分数$\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$の分子9と10の大小関係に還元されています。わたしたちは同分母分数への等式変形を“通分”と呼んでいますが，共通の分割を求めるという意味での“通分”は，u_1とu_2からuを求めるというところにあります。このことに留意しておきましょう。

7. 有理数の加法

有理数の加法は，二つの倍にそれの和を対応させる演算です。即ち，二数α_1, α_2の和$\alpha_1 + \alpha_2$は，図式：

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] \arrow[dd, "\alpha_1+\alpha_2"] & \\
y_1 & & y_2 \\
& y_1+y_2 &
\end{tikzcd}$$

で定義されるところの倍$\alpha_1 + \alpha_2$です。

7.1 分数の和，差

異分母分数の和は同分母分数の和に書き直すことができます。したがって，分数の和は同分母分数の和を考えれば十分ということになります。

いま例として，$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$を考えましょう。$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$は，図式：

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "\frac{2}{3}"'] \arrow[dr, "\frac{5}{3}"] \arrow[dd, "\frac{2}{3}+\frac{5}{3}"] & \\
y_1 & & y_2 \\
& y_1+y_2 &
\end{tikzcd}$$

で定義されるところの倍です。$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$の定義より

$$\begin{tikzcd}
u_1 \arrow[dd, "2"'] \arrow[dr, "3"] & & u_2 \arrow[dl, "3"'] \arrow[dd, "5"] \\
& x \arrow[dl, "\frac{2}{3}"] \arrow[dr, "\frac{5}{3}"'] & \\
y_1 & & y_2
\end{tikzcd}$$

となる量u_1, u_2が存在しますが，この二つは一致します（実際，ともに$x \times 3^{-1}$）。これをuで表わすと

$$y_1 + y_2 = u \times 2 + u \times 5 = u \times (2 + 5)$$

よって，$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}$となります。

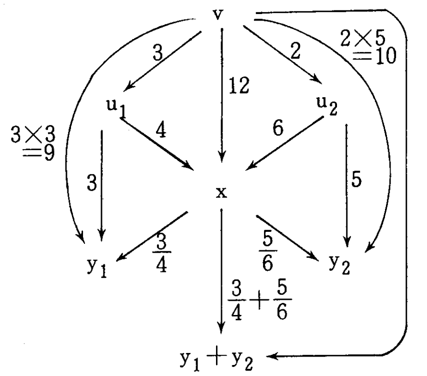
$$\begin{tikzcd} & u \arrow[d, "3"] \arrow[ddl, "2"'] \arrow[ddr, "5"] & \\ & x \arrow[dl, "\frac{2}{3}"] \arrow[dr, "\frac{5}{3}"'] & \\ y_1 & & y_2 \end{tikzcd}$$

計算のアルゴリズムは，

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}+\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{\triangle+\square}{\bigcirc}$$

です。

なお，異分母分数の和を直接求める手続きは，$\frac{3}{4}$と$\frac{5}{6}$を例とすると，つぎの図式のようになります（ u_1 と u_2 を共約する量 v を導入する手続きが加わる）：



9＋10＝19

分数の差も，同分母分数の差の形におろします。例として$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$を考えましょう。

ーは＋の逆算の意味です。したがって，$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$は，$\frac{4}{3}$との和が$\frac{5}{3}$になる数のことです。（$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$は一つの数の表現です！）そして，

$\frac{4}{3}+\frac{5-4}{3}=\frac{5}{3}$ですから$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{5-4}{3}$です。

よって，

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}-\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{\triangle-\square}{\bigcirc}$$

が差の計算のアルゴリズムとなります。

7.2　小数の和，差

紙数の都合上，割愛します。

8. 有理数の乗法

有理数の乗法は，二つの倍にそれの合成を対応させる演算です。即ち，二数α，βの積$\alpha\times\beta$は，図式：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\times\beta"'] & y \arrow[r, "\beta"] & z \end{tikzcd}$$

で定義されるところの倍$\alpha\times\beta$です。

8.1　分数の積，商

分数の和の場合，その計算は同分母分数同士の計算に還元され，アルゴリズムは

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}+\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{\triangle+\square}{\bigcirc}$$

でした。これに対し，分数の積の方は$\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{\square}{\triangle}$の形の積に還元され，そしてこのとき

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{\square}{\triangle}=\frac{\square}{\bigcirc}$$

が計算アルゴリズムになります。

例として，$\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}$を考えましょう。$\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}$は，図式：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\frac{2}{3}"] \arrow[rr, bend right, "\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}"'] & y \arrow[r, "\frac{5}{2}"] & z \end{tikzcd}$$

で定義されるところの倍です。$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{2}$の定義より

$$\begin{tikzcd} & u_1 \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] & & u_2 \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "5"] & \\ x \arrow[rr] & & y \arrow[rr] & & z \end{tikzcd}$$

となる量 u_1，u_2 が存在しますが，この二つは一致します（実際，ともに $y \times 2^{-1}$ ）。これを u で表わすと

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, dash, "3"'] \arrow[dr, dash, "5"] & \\ x & & z \end{tikzcd}$$

となり，よって $x \xrightarrow{\frac{5}{3}} z$

したがって

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{3}$$

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dl, "3"'] \arrow[d, "2"] \arrow[dr, "5"] & \\
x \arrow[r, "\frac{2}{3}"] \arrow[rr, bend right, "\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{3}"'] & y \arrow[r, "\frac{5}{2}"] & z
\end{tikzcd}$$

なお，一般の分数の積を直接求める手続きは，$\frac{4}{5}$と$\frac{7}{6}$を例とすると，つぎの図式のようになります（ u_1 と u_2 を共約する量 v を導入する手続きが加わる）：

$$\begin{tikzcd}
 & & v \arrow[dll, bend right, "3\times5=15"'] \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] \arrow[drr, bend left, "2\times7=14"] & & \\
 & u_1 \arrow[dl, "5"'] \arrow[dr, "4"] & & u_2 \arrow[dl, "6"'] \arrow[dr, "7"] & \\
x \arrow[rr, "\frac{4}{5}"'] \arrow[rrrr, bend right, "\frac{4}{5}\times\frac{7}{6}=\frac{14}{15}"'] & & y \arrow[rr, "\frac{7}{6}"'] & & z
\end{tikzcd}$$

つぎに分数の商の計算ですが，例として
$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$を考えることにします。

$\div$は$\times$の逆算の意味です。したがって，
$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$は，$\frac{4}{5}$との積が$\frac{2}{3}$になる数のことです。
（$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$は一つの数の表現です！）
そこでこの数をαで表わすと，

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\frac{2}{3}"'] & y \arrow[r, "\frac{4}{5}"] & z
\end{tikzcd}
\quad と \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\frac{4}{5}"] \arrow[rr, bend right, "\frac{2}{3}"'] & y \arrow[r, "\alpha"] & z
\end{tikzcd}$$

の二通りの図式が立ちます。そしてこれらはそれぞれ図式

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\frac{2}{3}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & z \arrow[r, "(\frac{4}{5})^{-1}"] & y
\end{tikzcd}
\quad と \quad
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "(\frac{4}{5})^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & x \arrow[r, "\frac{2}{3}"] & z
\end{tikzcd}$$

と同値です。（例えば第一の図式の場合，$\alpha=\alpha\times\frac{4}{5}\times(\frac{4}{5})^{-1}=\frac{2}{3}\times(\frac{4}{5})^{-1}$。）そして$\frac{4}{5}$の逆倍$(\frac{4}{5})^{-1}$は$\frac{5}{4}$ですから，それぞれの図式から

$$\alpha=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4},\qquad \alpha=\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}$$

が得られます。よって，

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}\div\frac{\blacktriangle}{\bullet}=\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{\bullet}{\blacktriangle}$$

が商計算のアルゴリズムになります。

8.2　小数の積，商

紙数の都合上，割愛します。

9. “整数÷整数”

整数÷整数は，÷が整数の乗法×の逆算として考えられているときには，定義されない場合が出てきます。例えば，$2\div3$は定義されません。

しかし，÷が有理数の乗法の逆算として考えられているとき（したがって，整数も有理数として考えられているとき）には，つねに定義されることになります。このとき$2\div3=2\times3^{-1}$で，$3^{-1}=\frac{1}{3}$ですから

$$2\div3=\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{2\times3}{1\times3}\times\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{1\times2}{1\times3}=\frac{2}{3}$$

となります。$2\div3=\frac{2}{3}$の左辺の 2, 3 の身分が有理数で，右辺の 2, 3 の身分が整数であるという点にも，留意しておきましょう。

なお，$2\div3$の図式は

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & y \arrow[r, "\alpha"] & z
\end{tikzcd}
\quad ないし \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & y \arrow[r, "3"] & z
\end{tikzcd}$$

ですが，これは$\frac{2}{3}$の図式

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] & \\
y \arrow[rr, "\alpha"] & & z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "2"'] & & y \arrow[dl, "3"] \\
 & z &
\end{tikzcd}$$

になっています。この意味でも$2\div3=\frac{2}{3}$がわかります。

さて，以上述べてきたことがおわかりねがえたでしょうか。是非ともわかって下さい。それで授業がやり易くなるとは言えませんが。（むしろその反対かも知れません。）