算数科“図形”領域教材研究――考察 1 (2)

宮下　英明

On “Informal Geometry” in Elementary School Mathematics――1 (2)

Hideaki MIYASHITA

目　次

昭和 63 年 9 月 16 日受理

4　述語の論理的導出

4.1　述定の論理系

4.1.1　述語の論理的導出

対象に対する述語の投企――恣意的結合――の対立概念は，対象からの述語の論理的導出である。即ち，述語が〈対象＝論理的対象〉の論理的含意として導出される場合である。

この導出は推論であり，対象に対する述語の関係は，“論理的必然”である。特に，（述語投企の場合にはあった）〈他者の承認〉という要素は，入ってこない。

4.1.2　実践としての，述語の論理的導出

論理的対象からの述語の論理的導出が“論理的必然”であるとは言っても，それはあくまでも結果論である。必然を見出すのは，実践である[註]。

また，論理的対象の含意のうちのどの一つに着眼することも自由だということで，〈選択〉という実践形態もある。このときの自由――必然の中からの選択の自由――を，述語投企の自由と混同してはならない。

（註）例えば，“三角形ＡＢＣ”から“角ＡＢＣ”を導出することは，実践である。“三角形に角を見る”という言い方は，この行為の実践的性格の表現になっている。（本来，“三角形に角を見る”は奇妙な言い方なのである。実際，“三角形ＡＢＣ”の論理的含意である“角ＡＢＣ”は，見る見ないの問題ではない。）

また例えば，“円”，“線対称形”，“回転合同形”の場合，述語の論理的導出としてのそれの実践形態は，それぞれ，“中心”，“対称軸”，“回転の中心”の措定である。これは，現前の対象に新しい要素を（“非在の中心”，“非在の線”として）加えることである。実際，現前の対象には，加えるべき要素は示されていない。新しい要素を加えるというこの行為には，何の必然もない。この行為は，純粋に“一か八かの賭け”である。

4.1.3　論理と非論理の差――〈主観〉としての“論理”

自分のしていることを，《一つの判断（述定）から一つの判断（述定）への移行》という形で捉えることがある。

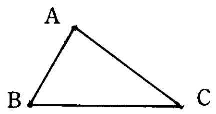
述定の“移行”が述定の論理的変形の過程と意識されるとき，われわれはこの“移行”に対して，“推理”とか“推論”ということばを用いたくなる。逆に，これという論理を見出せないと感じるとき，この“移行”に対しては“跳躍”のことばを用いたくなる。

しかし，現象としての実践――述定の系列――それ自体を捉えて“それは推理か跳躍か？”というように問題を立てるのは，無意味である。“推理か跳躍か”は，論理系――最初の述定を埋め込んで考える論理系――に対する“推理か跳躍か”である。したがって，論理系を一つ固定してはじめて，“推理か跳躍か”を問題にできるようになる[註]。

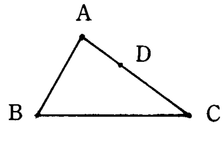
“推理”か“跳躍”かは，述定の系列の事実問題ではない。実際，述定の系列を“推理”にしてしまう論理（理屈）を，われわれはいつでもでっち上げることができる。

述定の系列は，一つの論理系に対して“推理”か“跳躍”かになる。そしてその論理系を承知しているのは，主観である。この主観がいなくなるとき，述定の系列は現象に帰る。

（註）例えば，“頂点Ａ，Ｂ，Ｃの三角形”



から“頂点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの四角形”



への移行は，“頂点A，B，Cの三角形”をどのような論理系の述定として考えるかによって，“推理”になったり“跳躍”になったりする。

4.1.4　述定の実践的意義と論理的身分の相互独立性

述定の系列の〈意義〉を定めるのは，前節で述べたように，主観である。別々の主観が同じ意義を与えることはあり得る。勿論，異なる意義を与えることもある。

述定の実践的意義——或る主観にとっての意義——は，その述定に対して可能な論理的身分づけ——別の或る主観にとっての意義——から独立している。即ち，述定間の論理的な関係は，それらの述定の実践上の関わりを示すものではない(註)。

(註) 例えば“正方形”は，生活実践上，“四角形”，“長方形”なしに成立し得る。

4.2　論理系の形成

4.2.1　論理的存在としての〈形＝述語〉の独立

“形”の語は——《形＝存在の形》として——存在を想定させる。

しかし日常言語の中でも，述語（命題関数）としての形（例えば，このようなものとしての“三角形”)は存在の語の補塡を要せず，それ自体で自立している。

それは，論理的存在として自立している。即ち，述語としての形は，ことばの（より一般に，記号の）論理にのみ従うのであり，述語としての形が投企されるところの存在には従わない。（特に，それは，行為の〈見る〉からも独立している。)

4.2.2　主語，対象，モノ

4.2.2.1　主語

述語は，主語に対する述語である。そして，（われわれの文法では）述語“しかじか”に対する主語は，“何がしかじかか？”という形で問えるようになっている。即ち，この問いによって，述語の主語というものの対象化がつねに保証されている。——主語が対象化されるとは，主語がことばで述べられるということではない。ことばで述べられなくとも対象化はできるというところが，ここで注意したい点である。

述語の主語は，ことば“[何]”である。それは，“[何]”として対象化される存在からは区別される。

“[何]”は，変項に代入される定項として，命題関数としての述語と同じ論理の下の存在＝論理的存在である（そして述語は，このときの命題が真であるときは，この定項の論理的含意——“条件”——ということになる）(註)。一方，“[何]”として対象化される存在は，論理に対しては“超越的存在”ということになる（次節)。

(註) 例１)“満月は円”は，“満月”と“円”をともに対象として取り込む論理系において，命題になる。例えば，日常言語がそれである。
２)“円は連結”は，“円”と“連結”を対象として取り込む論理系＝幾何学において，命題になる。例えば，距離空間の幾何学がそれである。

4.2.2.2　対象

われわれはここまで“対象”のことばを無反省に用いてきた。

“対象”を，“意識の対象になったものが対象だ”という言い方で片付けることはできない。実際，例えば“空（そら）を対象化する”とはどういうことか。どうしたときに，“空を対象化した”ことになるのか。

しかしまた，《対象とは？》という問題を立ててこれの答えを出そうとすることは，形而上学の罠に飛び込むようなものである。《対象とは？》の問いには，《対象は“対象とはしかじか”という形で述べられるものとしてあるのか？》という問いも入っているのである。

4.2.2.3　モノ

対象は，意識の上ではしばしばモノである。

“モノ”は，脱言語の存在の謂いである。“脱言語”が，モノの特徴づけになる。特に，モノは，“モノとはしかじか”という形では述べられない。《“これについては述べられない”は，モノの含意である》という意味で，モノについては述べることができないのである。

モノは，述べられない。ある言い回し――例えば，“これは円い”という言い回し――において示されるのみである。

形の語は，モノに対して投企される場合もあるし，主語と述語の結合の意味合いでことば(主語）に（述語として）投企される場合もある。――例えば，前者の場合の“この皿はまるい”，後者の場合の“テントウムシ（というもの）はまるい”。

4.2.3　現象と論理

既知の形であっても，その形をした対象の移動や分解，組み合せがもたらす或る結果は，ひとにとって全く新しい経験であり得る。またそれは，非常に興味のひかれる事がらであり得る。

ひとは形の論理を知るより先に，対象の形の事実を知る――特に，この事実の中の“対象にしかじかの操作を施せばしかじかの結果が得られる”という事実。

ひとは，ある形の対象に対し，回す，裏返す，折る，切る，組み合わせるの操作をしたとき，それぞれどのような形の対象が出現することになるかを知る。そしてこの後にはじめて，論理がくる。言わば，ひとは現象学から入ってつぎに論理学に行くわけである。

現実にそうなっているというだけではない。この逆は原理的に成立しない。実際，論理はそれ自体では存在し得ない。――ひとは，論理をはじめに見出すということはできない。

形の現象を見てひとは論理を考え出す。そして今度は，現象を論理の顕現・実現のように見たりする。これは主客を転倒させる倒錯であるが，この倒錯視には実践的な効用がある。(それ故この倒錯は，生活の実践の中ではむしろ強化される。)

現象を論理の実現と見るこの倒錯は，つぎのことがらと関わっており，この意味において，教育上の問題点になる。それは，一つの見方・考え方をすることが，事実上，別のようには見ない・考えないと同じになっている，ということである。

形は，見られた形に他ならない。ここで“見る”とは，現象を論理的対象に変えることである。これは別モノ化していることであって，特に，曖昧を確実に変えるといったようなことではない。

形はことばである。そしてそれは，それ自体で考察の対象になり得る。これを要素にする世界を築き上げることができる。形はこうして，これらが見られている存在から独立し，自律的な体系をつくる。

4.2.4　論理系の意義（効用）

論理系の意義は，“世界の事態のシミュレーション”の意味での，“計算”である。それは，応用計算に対する数体系の意義と変わらない。

例えば或る論理は，“因果の論理”の読みで，しかじかの操作に対する結果を予見することに応用される。また論理のフィルターを通して見ることで，既知の個々の事実が或る一般的事実へと拡張されるようになる。

5　対象の類化

5.1　対象の類のつくられ方

5.1.1　同じ述語

異なる対象に同一の述語があてられるということで，結果的に，対象の類が実現される。語用から対象の類がつくられるわけである。――特に，形の類が，異なる（述語としての）形に同一の述語があてられるという事態から結果する。

類を結果的に実現する述語は，一旦意識対象

になった類に対してはそれの名として機能する。この述語があてられた対象が類に加わるわけであるが，この事態は，対象を類の名で呼ぶという外観のものになる。

5.1.2　同値関係

対象の類は，一般に，対象間の同値関係を定めるという形で実現される——代表の対象に同値な対象の類。

同一の述語をあてることによる類の実現（前節）は，実際，これに含まれる。——《ともにその述語があてられる》がこのときの同値関係である。

5.1.3　同型対応

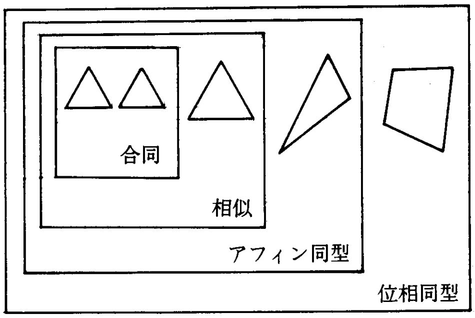
空間（構造を伴う点集合）の部分についての《その間に同型（対応）が存在する》は同値関係であり，したがって〈対象＝空間の部分〉の類をもたらす——代表の対象に同型な対象の類。

考え得る“同型”（“同じ形”）——特に，“形”の概念——は一つではない(註1)。そして，異なる“同型”の概念には異なる幾何学（“エルランゲン目録”が述べる意味での異なる幾何学(§8.3)）が応ずる(註2)。

名を与えることが難しい類の場合，同型の概念による類特定の方法は，有効である。例えば，二つの図：

をわれわれは“同じ形”と認めるが，この類型としての形に名を与えることは難しい（名を与えることそれ自体は簡単だが，それは実効しない)。しかし，“代表”と“相似”の概念で，この類型は示すことができる。

（註 1）例えば，“形が同じ”が“合同”の意味である場合の“形”，“相似”の意味である場合の“形”，“アフィン同型”の意味である場合の“形”，“同相（位相同型)”の意味である場合の“形”は，互いに異なる“形”である：



（註 2）“合同（変換)”，“相似（変換)”の概念は，実際つぎのように，カテゴリー論に言う“同型 (isomorphism)”になっている。

“合同”の場合，対応するカテゴリーの対象 (object) は距離空間，射 (morphism) は等長写像である。空間の自己同型が“合同変換”で，空間の二つの部分が合同変換によって互いにうつることが“合同”である。合同変換を空間の部分に制限したものは等長写像になっているから，“合同”は確かに“同型”のことである。

“相似”の場合は，距離が等倍される写像が射になる。空間の自己同型が“相似変換”で，空間の二つの部分が相似変換によって互いにうつることが“相似”である。

5.2　類化の規制要因——言語と身体性

5.2.1　言語

同一の述語をあてることによる対象の類化は，実践である。

言語生活では多くの場合,《対象の同一視が先ずあってこれらに同じ述語が使われる》というのではない。対象に述語をあてるという実践が，端的にある。

われわれは，論理として,《対象の同一視と差異化という認識の事実が先ずあり，その上で，同じものには同一のことば，異なるものには違うことばがあてられる》というように考えたくなる。しかし，しばしばそれはフィクションである。形の述語の現われる生活実践は，概して

このようではない。

“はじめにことばある”が，多くの場合事実になる。これに対する《対象の同一視》は，結果論であり，予定調和の解釈に過ぎない。

5.2.2　身体性

“同じ形”，“似た形”の意識に導かれる対象の類化（類型化）は，しばしば，われわれの身体性の事実――身体の効果――である。

即ち，何がしかの理屈に立って対象の類型化が為されたのではなく，対象の類型化という事実が端的に先ずある。それは理屈抜きの行為である（理屈は後から立てられる）(註1)。

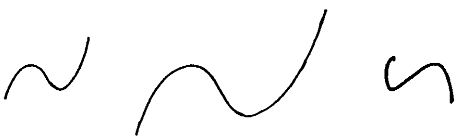
身体の効果としての類型化は，説明できない。効果としての現象が記述できるのみである。

例えば，鳥が異なる種類の動物をひとしく餌にしているということを指して“その鳥の身体性”と言うときの“身体性”と，ここで考えている身体性は，同質のものである。いまの例で言えば，異なる動物がひとしくその鳥にとっての餌になることの説明はできず，できるのは，これこれの動物は餌になるというようなことの記述だけである。

身体性の効果としての対象の類型を，われわれはそれに名を与えるとか（この名は，同時に，その類型の対象に対する述語になる），同類であることの規準を述べるという形で，ことばに表わす。

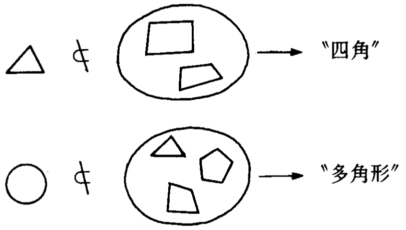
類型が身体の効果として起こるとき，それはことば抜き（分析抜き）である。名や規準を捻出するときに，ことば（分析）が起こる。即ち，対象ないし対象の間の関係の分析は，その類型の名ないし同類の規準を考え出す段の出来事である(註2)。

（註１）例えば，三つの図：



の場合，われわれにははじめの二つの図が同じ形に（否応なく）見えてしまい，最後のものがこれらと異なる形に（否応なく）見えてしまう。

（註２）例えば，“四角（形）”や“多角形”のことばは，類型としてのそれを他の類型から区別するために類型の対象を分析した結果である：



5.3　対象性の簡約

対象の類化それ自体は，対象性の簡約ではない。実際，“同類の対象を同一視して区別しない”と言うとき，それは区別できることの上での“区別しない”である。同一視は，同一視される差異の認識と同時である。

対象の類化は，類を改めて第一階の対象に据え，類を構成する対象を捨てることをして，はじめて対象性の簡約の意味をもつ。――それは例えば，命題関数としての《３辺がそれぞれ２cm，３cm，４cmの三角形》(註)が対象記号に変わるといったことである。

（註）命題関数としての《３辺がそれぞれ２cm，３cm，４cmの三角形》は，《xは３辺がそれぞれ２cm，３cm，４cmの三角形》である。このときには，変項xに代入される対象が個々の《３辺がそれぞれ２cm，３cm，４cmの三角形》ということになる。

《３辺がそれぞれ２cm，３cm，４cmの三角形》が対象記号であるときには，《３辺がそれぞれ２cm，３cm，４cmの三角形》は一つしかない。

6　“形”と“見方”の形而上学

6.1　“形＝実在”の形而上学

6.1.1　“形＝モノの属性”

われわれは，形を，実在に関する事実――実在の性質――として，そしてこの意味で〈実在〉

として，考えてしまいやすい。即ち，“形はモノの属性である”，“モノの属性として形が在る”という具合に。

しかし，形は〈形を見る〉主体が見るところのものである。そして一般に，属性は〈属性を捉える〉主体が捉えるところのものである。

ひとは形を考えるときに，〈見る〉主体の要因を看過してしまう。そして，形を専ら，見られるモノの事実のように受け止めてしまう。

モノに対してわれわれは形を見る。しかしそれは，《モノの形という事実があって，われわれはそれを見出す》ということではない。われわれの身体性として，《モノとの出会いにおいてモノに形を認める》があるということである。

“モノの形”は，われわれの身体の事実であり，モノの事実ではない(註)。

(註) 実際，同一のモノに対するわれわれと或る生物の捉え方が違うとすれば，それは“属性”がわれわれの身体性に他ならないということを示している。例えば，犬が色盲であるということは，色（＝われわれの知る色）がわれわれの身体性に他ならないということを示している。

6.1.2 イデア論

モノに述語が一旦読まれるとき，そのものに対し“述語の表現素材＝実現態”という捉え方ができる。例えば，モノ“満月”は述語“円”の実現態，モノ“この（三角形の）山”は述語“三角形”の実現態，というようになる。

《モノは述語の実現である》，《確かなものは述語であり，個々のモノは述語の偶然的な現われに過ぎない》といった形で述語をモノの上位の存在とする考え方を，イデア論という。

イデア論に立てば，モノのうちには述語があることになる。属性の身分で述語がある。

イデア論は，観念論的倒錯である。それは，ことばの罠に陥った思考形態である(註)。

(註) われわれは，モノに対する読みとなることばを先取しており，そしてこれを用いてモノに対する読みを行なう。読みがモノに先行して在るわけである。イデア論は，先行する読みを優位の存在と定めることで出来上がる。

6.2 “形＝見方”の形而上学

6.2.1 “見る主体”の顕在化

〈見る〉主体から独立して“形”を考える形而上学に対し，これの否定として“形＝見方”の図式を立てることは，また一つの形而上学に他ならない。

“形＝見方”の発想は，“形”を主体の側に引き寄せるものになっている分だけ，“形＝モノの属性”，“形＝イデア的実体”の発想と比べて一つの前進である。しかしこのときには，“見方”を実在させる形而上学が，替わりにつくられている(註)。

(註)“しかじかの見方・考え方をする”，“しかじかの見方・考え方を使う”という言い回しに出会う。しかし，そこに物や道具が在るように，“見方・考え方”が在るわけではない。(“在る”を用いたわれわれの言い回しは，“アタマの中に在る”ということになる。しかし，“アタマの中に在る”とは，そもそもどんなことか。)

6.2.2 述語に対する“見方の表出”の解釈

“見方”は，述語の上で対象化される。“見方”が述語に先行して在るのではない。述語から“見方”が対象化される（読まれる）。――現われているものが事実の全てであり，述語がここでは現われているものの全てである。

述語を“見方”の表出と考えることはできる。しかし，ただそれだけのことである。“表出”の言い方を使うならば，それはどんなものの表出でもあり得る。この言い方には，責任が伴わない。

6.2.3 道具的因果的発想としての“形＝見方”

“形＝見方”の発想――一般に，“見方・考え方”(“認識形式”)の発想――は，道具的因果的発想)(註)である。

ひとは，行為の説明概念として“見方・考え

方”を持ち出す。即ち，“見方・考え方を使うことで実現される行為”という形の発想をする。この発想では，使われる／使うことのできるような〈何か〉——実在——として“見方・考え方”がなければならない。

このときには，述語としての形は“見方”の表出として発想される。

しかし前節で述べたように，事実は，《“見方”が述語に結果するのではなく，“見方”という読みが述語に対し為される》ということである。

（註）ひとは，事態を〈因果〉として考えたがる。即ち，事態を，何かの原因によって引き起こされたものと考えたがる。そして，原因が特定されたと思えたとき，その事態をわかった気持ちになれる。その事態は説明されたと感じる。

ひとは，事態に〈説明〉をもとめたがる。

〈説明〉は，事態の〈人間化＝自分化〉である。ひとは，事態を疎遠なままにしておくことに慣れていない。疎遠な事態を許容できない。

6.3　形而上学としての言語運用

6.3.1　ことばの罠

われわれのことばの文法は，“モノに形を見る”の言い回しに対して，様々な操作を許す。特に，つぎのような(註)：

“モノに形を見る” → “モノ” → “モノとは何か”
“モノに形を見る” → “形” → “形とは何か”
“モノに形を見る” → “見る” → “見るとは何か”
(分離)　(＋“とは何か”)

“モノとは何か”，“形とは何か”，“見るとは何か”は，文法的に許された言い回しである。

《文法に適っている》は，《有意味である》と同じではない。しかしひとは，文法上可能な言い回しを有意味な言い回しとして扱ってしまう。

特に，“モノとは何か”，“形とは何か”，“見るとは何か”と考え出す。これらを，大真面目な問題のように受け入れてしまう。

しかしこれが問題として可能ということでは，例えば“白い黒とは何か”も問題として可能なのである——全く同資格のものとして。

（註）われわれは，“モノに形を見る”という言い回しを使う／使える。しかしこの使用は，個別に了解された“モノ”，“形”，“見る”の結合の結果として出てくるのではない。《“モノに形を見る”という言い回しが使える》という事実が端的にある。これが出発であり，事実の全てである。

6.3.2　“有意味”の相対性

ある言い回しが《有意味》であるとは，それが生活の上で機能するということである。したがって，《有意味》はケース・バイ・ケースである。それは，生活の共同体に依存する。

特に，“モノとは何か”，“形とは何か”，“見るとは何か”の言い回しも，有意味になり得る。即ち，この言い回しが有意味となる共同体はあり得る(註)。

（註）“白い黒とは何か”を考え出す人に対しては，われわれは“ビョーキ”というレッテルを貼りたくなる。あるいは隔離したくなる。一方，“モノとは何か”，“形とは何か”，“見るとは何か”を考え出す人に対しては，われわれは“哲学者”とか“思索者”といったレッテルを貼りたくなる。隔離するときにも，“隔離”とは言わないで“敬遠”と言う。——われわれの共同体ではこのようになる。

6.3.3　形而上学への対応

言い回し——例えば，“形とは何か”という言い回し——それ自体について有意味／無意味は言えない。前節で述べたように，有意味／無意味はその言い回しをどの共同体の上で考えるかで変わる。それは，共同体（“ひと”）に依存する。

そこで，問題は《この言い回しは有意味か無意味か》ではなく，《この言い回しは有意味になるか否か》であり，また主体の問題としては，

《この言い回しを有意味とするか否か》である。

《有意味とする》とは，これを有意味とする既存の共同体に我が身を置くか，あるいは，これを有意味とする共同体を新たに起こすということである。言い回しの有意味／無意味の問題は，言い回しに対し自分がどのようなスタンスを置くかの問題なのである。

7　“形”の数学化

7.1　“形”と幾何学

7.1.1　幾何学の契機としての“形”

“形”と幾何学の関係を述べることばは，“形は幾何学の一つの契機”である。“形は幾何学の内容（対象）”ではない。

幾何学（数学）に対する“形”の主題化は，それの幾何学（数学）化である。形”は〈幾何学化〉において主題になる。〈幾何学〉の中に“形”はない。

幾何学は“形”の語を要しない。われわれが幾何学において“形”の語を用いるとすれば，それは，語の流用としてである。そしてこの流用の理由は，われわれが幾何学での“しかじか”を総称する語——簡潔な語——を持っていないことである(註)。

しかし，この“形”の語の流用は混乱のもとである。——特に，“図形”指導が事実上幾何学に入っているときに，“三角形”，“円”等の総称として“形”の語を用いる場合など。

(註) 確かに，或る形へと意味遡行される幾何学内対象は，命題関数“xはしかじか”として，幾何学内存在の含意として述べられることがあり，このことを指して，ひとは“存在の形を述べる”という言い回しをしたくなるかも知れない。しかし“xはしかじか”は，存在の含意（“形”）として成立しているのではない。それは存在の補塡を要しない。それ自体で成立している。

7.1.2　“形”の主題

“幾何学化”は“形”の主題の一つである。そしてその他に（それ以前に），“存在論”ないし“語用論”がこれの主題になる。

存在論の主題については，既に考察してきた。但し現段階で言えることは，せいぜいつぎのようなことである。即ち，《われわれはものに形を見てしまう；これが事実であって，形という存在が事実なのではない；形とは，見てしまった形のことである；さらに，それは表現されてはじめて“見た形”になる；翻って，形の表現を巡る実践ないし生活が，存在としての形である。》

この結論から，つぎに語用論が“形”の主題としてもち上がることになる。——“ひとはどのようなときに，どのような形の語を，どのように用いるか；そこにはどのような規準，論理が見出されるか”

“形の語の運用の規準，論理”の主題からは，“形の語の論理”の主題が派生して出て来る。そしてこの“形の語の論理”を数学（幾何学）として宣言するとき，“形”の数学（幾何学）化がなされたことになる。

7.1.3　ことばの自律系としての幾何学

7.1.3.1　ことばの自律系

われわれは，（モノにではなく）文法と論理のみに従ってことばを操ることができる。これはことばを自己増殖させる営みであるが，こうして，モノから独立したことばの世界（論理系）がつくられていく。

数学は，この〈ことばの自己増殖〉を自らの方法論としている。それは，モノを排除して純粋にことばであろうとする。ことばの自律系であること，これが数学の方法論である(註)。

“形”の語は，《形＝存在の形》として，存在を想定させる。しかしことばとしてのそれは，それ自体で自立している。

(註) 代わりに，数学の対象の意味を遡行して存在論に入っていく作業を“数学哲学”として用意する。

7.1.3.2　トートロジー

幾何学は，トートロジーとしてつくられる。実際，幾何学で為されているのは，つぎのようなことである。即ち，シンタックスに則って語から命題，命題関数(註1)をつくる；否定，論理和，論理積の操作で命題関数から命題関数を作り出す；一つの命題関数からそれの含意として別の命題関数を導く；命題関数の変項に定項を代入して，命題をつくる；命題関数の変項に代入した結果が真な［偽な］命題であるような定項――幾何学における存在（[何]）――を特定する。

特に，この実践形態において，命題関数はそれ自体で自立するものになっている――それの変項に定項が代入されることで対象として完全になる，というのではなく。

トートロジーとしての幾何学は，新しい対象の導入によって新しい局面を切り開き，規模を拡大していく(註2)。但し，あくまでもトートロジーの拡大である。それは実践的に新しい“論理”を付加して行くものであるが，本質的に新しい論理の付加はない。出発になっている論理に対し，それの新しい含意形態が付加されていくに過ぎない。――そもそも，新しい論理の付加は，幾何学自体の変更を意味する。

（註1）一般に，n変項の命題関数（“xはしかじか”は1変項の命題関数）。
（註2）例えば，“xは三角形”と“xは線対称”が既に得られている命題関数のとき，この二つの積をつくることで“二等辺三角形”という新しい――この論理系において“新しい”――対象が導入される。

7.1.3.3　事実＝論理的事実

幾何学（数学）における〈事実〉とは，論理的事実のことである。事実か否かの判定の規準が論理として与えられているために，そこでは〈事実〉を扱える。

“形”の論の段階では，〈事実〉を扱えない。モノに形を見ることは，実在としてのそれの事実を取り上げることではない。形はひとの恣意であり，保証を持たない。

7.2　“形”の数学化

7.2.1　本質疎外

ひとは，日常語の数学化を“日常語の厳密化／正確化”のように考えたがる。“日常語＝曖昧，数学＝正確”の図式を立てたがる。しかしこの認識は，誤りである。

日常語の数学化には，“曖昧さから確かさへ”，“欠陥から完全へ”，“不十分から十分へ”のような意味合いは何もない。日常語の数学化は，日常語の別もの化（本質疎外）である。

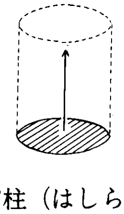
確かに，数学は日常言語を雛型にしている。日常言語から対象のモデルを借り，それをコトバとして自立させる。しかしそれは，日常言語の改良としてではない。

日常言語と数学は，それぞれ別の用途と射程を持つ。両者は別ものとして横に並ぶ。上下には並ばない。

実際，以下に述べるような意味で(註)，数学的な語用は日常の生活の或る場合においては使いものにならない。

日常語の形（即ち，生活実践上の形）“X”の数学化は，“X”を或る数学的条件（ここで“数学的条件”の意味は，その条件の記述が数学の中の記述になっているということ）を満たすものとして捉えることである。しかし，この数学的条件は，もとの“X”に対しては欠落であると同時に過剰である。即ち，生活実践の中で“X”と捉えられるものが，数学の中では“X”でなくなり，逆に，数学の中で“X”であるものが，生活実践の中では“X”でなくなる。

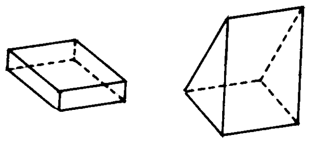
例えば，数学の概念の“柱（ちゅう）”：



は，日常語の“柱（はしら）”の数学化であるが，この二つの見方はつぎのようにズレてしま

う：

・柱（はしら）に見えなくとも柱（ちゅう）：



・柱（はしら）に見えても柱（ちゅう）でない：

(註)逆に，つぎのような意味においてではない：“まるい”＝“一点から等距離”のときには，物を指して“これはまるい”と言うことが永久に不可能になる。——実際，このような言い方は，《日常語の数学化＝日常語の厳密化》の発想の下にある。

7.2.2　二値論理

文としての形は，論理の中にある。そしてこの論理が数学的論理（数学的語用を規定する論理）である場合に，その形は数学の対象になっているということになる。

数学の論理は，古典的な二値論理である。そこで，例えば“ｘは細長い”は，日常語の論理の中には収まるが，数学の論理の中には収まらない。(“細長い”が数学の中に入るとすれば，それは，“細長い”が，細長いものと細長くないものをきっちり区分けする概念になっているときである。)

7.2.3　“見る主体”の無化

形には“見る主体”の契機がある。形＝“見える（見えてしまう）形”として。

形の数学化において，この契機は外される。それは，“三角形のように見える・見えない”が，(認識以前のア・プリオリな事実としての)“三角形かそうでないか”に変えられるということである。

“しかじかのように見える”については，各々の形の規準はあり得ない。考えられたとしてもそれはケース・バイ・ケースのものである。そして規準化を妨げているのが，“見る主体”の存在である。数学化は規準が与えられている対象への変更であり，そこで“見る主体”の無化がこれの要件になる。

7.2.4　分析的読み

形が幾何学の内容になるときには，それは(無定義対象でなければ) 対象の分析的な読み（“しかじか”）としてである。

日常語では，形は必ずしも対象に対する分析的な読みではない。実際，個人の成長の上では，形の特定の後に“形を分析する”が来る。“形の語を大人のように使える”は，端的な事実としてである。これは，“形を分析する”をした結果ではない。

日常語の中の形は，対象の分析的読みとして幾何学の内容になる。分析的な読みになっていない形を幾何学の内容にするためには，分析的な読みにそれを変えなければならない(註)。

(註) 例えば，“円（まるい)”では，“それの全ての点が或る一点から等距離にある”，“曲率一定”のような読みにする。

8　世界，言語，空間，幾何学

8.1　世界，言語

8.1.1　世界

“世界”は，ひとの意識する世界である。この意識対象から反照的に“実在”が対象化される——即ち，ひとの意識に外在する存在として；あるいは，世界が対象化される前提として。

8.1.2　“世界”の対象化

“世界”の対象化は，単一の“世界”に対しては起こらない——起こる必要がないという意味で。

対象Aが“世界”として対象化されるためには，別の対象B，C，……が加わって，A，B，C，……の各々が他に対して相対化される（一つの“世界”として相対化される）というプロセスがなければならない(註)。

（註）“自分”の概念が起こるためには，“他人”が登場しなければならない。“国”の概念が起こるためには，“外国”が登場しなければならない。“世界”の場合も同様である。

8.1.3　世界認識

或ることを“世界の事実”として認識すること——そのことの積み重ね——が，世界認識である。

さらに，或ることを世界の事実として認識するとは，同時に，或る世界においてはそれは事実にならないと認識することである。実際，後者がなければ，“世界の事実の認識”にはならない。

したがって，世界認識とは，或る事実を世界に依存する事実として認識すること——それの積み重ね——である。肝心なのは，事実認識における“世界に依存する”というところの認識である。世界認識としての事実認識は，事実の相対性の認識である。逆に，事実の相対性の認識になっていない事実認識は，世界認識とは位置づけられないわけである(註)。

（註）例えば，“三角形の内角の和は 180°”の認識は，それ自体では世界認識（の一つ）ではない。世界に依存する相対的事実として認識されるときに，世界認識（の一つ）になる。

8.1.4　言語

世界認識は言語において示される。逆に，世界認識とは，言語において示される世界認識のことである。また，言語とは世界認識を示すもののことである——この意味で言語は，われわれの通常イメージする“ことば”に限定されない。

8.1.5　世界の同型，言語の同型

世界に対する“同一の世界”／“異なる世界”の意識は，“世界の類型”の意識に進む。世界を類型化する概念の一つに“世界の同型”がある。

“世界の同型”は，言語の同型として示される。実際，言語において示されるところのものとしての世界については，それの同型はこのようなものである他ない。

8.2　空間

8.2.1　“現空間”——世界認識の中の“空間”

“空間”の日常言語的意味は，対象の所在する／しない空間である。対象が所在しない空間としてイメージされる“空虚”も，“対象”を想定して初めて存立し得る概念である。

“対象の所在する空間”の概念には，対象の論理系としての“世界”の概念が随伴していることになる。この空間は，世界認識の中にある。それは，“現前する空間（現空間）”である。

世界認識の一環として“空間認識”がある。したがって，§8.1.3で世界認識について述べたことは，そのまま“空間認識”についてもあてはまる。即ち，或ることを“空間の事実”として，かつ“空間に依存する事実”として認識すること——そのことの積み重ね——が，“空間認識”である。

世界を構成するのは“対象”であるが，空間を構成するのは“対象”ではない。空間に対する対象の在り方は，所在であって所属ではない。対象は世界に属する。そしてこの意味で，それは空間に対して外在する(註)。

（註）空間の部分を対象化するという形で，対象をつくることができる。しかしこのときにも，対象は空間に属するのではない。それは，当座の世界か，あるいは別の或る世界に属している。

8.2.2 言語の表現空間

“現空間”は，結局のところ，(世界を示す)言語の表現空間である。そして言語の表現空間は，一般的に考えることができる。

言語の表現空間——以下単に，空間——は，世界の事態のシミュレーションの用途で使われる。これは，世界の事態のシミュレーションとして数計算を行なうといったことと，全く同レベルのことである。

空間は，世界のコピーとして使われるのではない。言語化（言語に表現）した世界の事態をさらに空間において表現する——正しく，《表現＝本質疎外》の意味で——というのが，空間の使い方である。世界の事態が描かれる“キャンバス”が，空間である。

8.2.3 “空間”の対象化

“世界”の対象化について述べたこと（§8.1.2）は，そのまま“空間”の対象化についてもあてはまることである。即ち，“空間”の対象化が起こるとすれば，それは“相対性としての空間”の認識を伴うことによってである。

特に，“現空間”に対する３次元ユークリッド空間の構造の対象化は，それのみであれば，“空間としての現空間”の概念化に及ぶ必然はない。“空間としての現空間”の概念化は，“別の構造が考えられる”，“これとは異なる空間がある”という認識を俟たねばならない。

8.2.4 “構造を伴う点集合”としての空間

空間の定式化の一つは，“構造を伴う点集合”である。数学的概念の“空間”はこれである。このとき，空間の同型が，“構造を伴う点集合”の同型として主題になる。

8.2.5 アフィン空間——点を記述できる空間

空間が“言語の表現空間”（また，遡って“世界の事態の表現空間”）であるためには，その点が記述できるようになっていなければならない。（空間の部分の記述は，それに属する／属さない点の記述として為される。）

点を記述できる空間は，アフィン空間である。実際，空間の一点O（オー）を“原点”として固定するとき，空間の任意の点Xは，Oに対するベクトルxの作用（“併進”）：

$$O_+ x$$

の形に一意的に表現できる。(作用を，ここでは右作用$_+$の形で書いている。)

ベクトルの記述の方は，随伴ベクトル空間——係数体K——の基$\{u_i\}$を固定することで行なう。実際，任意のベクトルxは，

$$\Sigma\{u_{i\times}\xi_i\} \qquad (\xi_i \in K)$$

の形に一意的に表現できる。(スカラー倍を，ここでは右作用$_\times$の形で書いている。)

結局，空間の点Xは，

$$O_+\Sigma\{u_{i\times}\xi_i\} \qquad (\xi_i \in K)$$

の形に一意的に書ける。特に，スカラーの組$\{\xi_i\}$が点Xの表現になるが，これがXの（原点Oと基$\{u_i\}$に関する）“座標”である。また，原点Oと基$\{u_i\}$の系$\{O, \{u_i\}\}$が，点のこの座標に対する“座標系”である。

このようにアフィン空間は，“座標系を入れることのできる空間”として“点が記述できる空間”になっている。

8.2.6 “現空間”の構造

“現空間”は，そこに“位置”の概念を導入し(註1)，《位置＝点》と読むことで，“構造を伴う点集合”になる。

“現空間”に対しては，“構造を伴う点集合”の異なる解釈が可能である。特に，３次元実アフィン空間——３次元実ベクトル空間を（“併進空間”として）随伴するアフィン空間——の解釈が立つ。

３次元実アフィン空間としての“現空間”への座標系の導入は，任意ではない。“現空間”には，計量（距離）が独立して考えられている。座標系の導入は，この計量と両立する(註2)ものでなければならない。そして，そのような座標系は，随伴ベクトル空間の正規直交基底に応ず

る。

（註１）対象を契機に“位置”の概念が起こる。“空虚”からは“位置”の概念は起こらない。

（註２）ベクトルx_1とx_2の内積$x_1 \cdot x_2$が，x_1の座標（ξ_1，η_1）とx_2の座標（ξ_2，η_2）に対する$\xi_1 \times \xi_2 + \eta_1 \times \eta_2$で定義できる。内積が定義されると，ベクトル$x$の絶対値$|x|$が　$x \cdot x$で定義され，二点X，Yの距離が$|\overrightarrow{XY}|$で定義される（$\overrightarrow{XY}$は，$X_+ x = Y$となるベクトルxのこと）。ベクトルの内積が座標系に依存することで，$|\overrightarrow{XY}|$も座標系に依存している。

8.2.7　世界内対象の空間表現

世界の事態の表現空間は，世界内対象をそれの部分として表現するものでもあり得るし，点として表現するものでもあり得る。

“現空間”は，世界内対象をそれの部分（〈位置＝点〉の集合）として表現する。

世界内対象を空間の部分に表現するとき，対象の生起／変化／運動が，空間の部分の変換に表現され，対象間の関係性が，空間の部分の関係性に表現される。

8.3　幾何学

8.3.1　言語としての幾何学

幾何学は，言語である。但し，言語が幾何学であることの規準というものが立てられるわけではない。或る言語が幾何学とされるか否かは，論理的にではなく，実践的に決められる（と考える他ない）。

8.3.2　幾何学の形態

それぞれの幾何学は，一つの世界を記述している。

一つの幾何学に対し，世界内事態を表現する目的で，空間（＝構造を伴う点集合）が導入されることがある[註1]（Cf. §8.2.2）。

この導入された空間に対しては，改めてそれの構造を考察し，さらに構造の論として独立させるという作業が考えられてくる。《しかじかの構造をもつ空間》を対象化するわけであるが，これも一つの世界記述としての幾何学であり[註2]，特に“空間論としての幾何学”と言うことができる[註3]。

一つの空間Sの記述もまた，世界記述としての幾何学である。Sが世界であり，Sの点が，世界の構成要素である。ただしこのときには，“空間”のことばは無用になる——世界を“空間”と呼ぶ必要は最早無いという意味で。実際，“空間の記述”は見掛けに過ぎなくなる。

（註１）例えば，幾何学基礎論の形で（ヒルベルトの公理系として）述べられるユークリッド幾何学に対しては，ユークリッド空間（＝実数体$\mathbb{R}$上のユークリッド計量線型空間を随伴ベクトル空間とするアフィン空間）が導入される。

（註２）例えば，ユークリッド空間の構造の考察から，位相幾何学やアフィン幾何学を編み出すことが出来る。

（註３）空間論の内容は，空間の構造の特定とその特徴づけ，空間を類化する規準の導入と，空間の類化・類別，等である。特に，同型な構造において不変な性質を特定するということが，これの内容の一つにある。この性質に着眼すれば，構造の同型が逆に判定できるわけである。

また，同型の条件をもっと緩く考えて，その場合に不変な性質を特定するということも行なわれる。この性質に着眼すれば，同型より緩い《空間の構造の類別》ができることになる。

8.3.3　“エルランゲン目録”

一つの空間Sの記述については，異なる方法論が立つ。“エルランゲン目録”で述べられるのは，このような方法論のうちの一つである。それは，Sの一つの変換群Gに関する“SのGのもとでの不変式論”を展開するということである。

“エルランゲン目録”については，“幾何学を総合する思想”という受け止め方がなされるが，幾何学全般を考えてのことであれば，それは誤解である。“幾何学を総合する思想”の実際のところは，“一つの空間Sの記述としての幾何学を総合する思想”である。