算数科“図形”領域教材研究―考察２(2)―

宮　下　英　明

On “Informal Geometry” in Elementary School Mathematics — 2 (2)

Hideaki MIYASHITA

目　　次

4 変換(1)——“点表現の枠の変換”

4.1 変換の概念——“点表現の枠の変換”と“絵の変換”

“変換”のことばは，空間に関しては二通りの解釈が可能である。一つは“点表現の枠の変換”，そしてもう一つは“絵の変換”である。

“空間の変換”という言い回しがあるが，文字通りのそれは，“或る空間の中の空間の変換”でなければならない。実際，変換する空間のその変換が見えるためには，この変換の場としての別の空間が要る。そしてこのときの“空間の変換”は，“絵の変換”である。——“空間Xにおける空間Yの変換”での空間Yの身分（本質）は，（キャンバスとしての）空間Xの上の絵。

キャンバスである空間に対しては，“点表現の枠の変換”と“絵の変換”の他に“空間の変

1989年４月28日受理

換”があるわけではない。“空間の変換”は“絵の変換”である。——繰り返すが，空間に関する“変換”のことばの解釈は“点表現の枠の変換”と“絵の変換”の二通りである。

本章ではこのうち“点表現の枠の変換”を主題化し，そして第6章で“絵の変換”を取り上げることにする。

4.2 線型空間と線型変換

4.2.1 基底の取り替え，線型変換

線型空間の要素は，固定された一つの基底に対して表現される。したがって線型空間の場合，点表現の枠の変換は“基底の取り替え”の形で考えるのが自然である。この変換を線型変換と呼ぶ。

4.2.2 変換の表現と変換の計算

線型空間$(D,\ K)$の基底を$(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n)$から$(v_1,\ \cdots\cdots,\ v_n)$に変えることによって，$D$の要素表現の変換がもたらされる。この変換の表現を問題にしよう。

自然な考え方は，

$$u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n$$
$$=v_1\times\eta_1+\cdots\cdots+v_n\times\eta_n$$

となる係数の組$((\xi_1,\ \cdots\cdots,\ \xi_n),\ (\eta_1,\ \cdots\cdots,\ \eta_n))\in K^n\times K^n$全体の集合として表現することである。変換は，このときグラフ

$$f\subset K^n\times K^n$$

として表現される。

しかしこのグラフを実際につくることはできない。それは存在として想定されるのみであり，参照することはできない。この表現は現実的ではない。

われわれは変換の現実的な表現を知っている。それは

$$u_i=v_1\times\alpha_{i1}+\cdots\cdots+v_n\times\alpha_{in}$$
$$(i=1\ ,\ \cdots\cdots,\ n)$$

となる係数の組

$$((\alpha_{11},\cdots\cdots,\alpha_{1n}),\cdots\cdots,(\alpha_{n1},\cdots\cdots,\ \alpha_{nn}))$$

である。実際，Dの各元は

$$u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n$$

の形に書けるわけであるから，変換の表現は，この係数の組の特定で十分ということになる。

係数の組$((\alpha_{11},\cdots\cdots,\alpha_{1n}),\cdots\cdots,(\alpha_{n1},\cdots\cdots,\alpha_{nn}))$は，見易さおよび計算のし易さを考えて，行列

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

の形に書かれる。ここで“計算”とは，ξ_1，$\cdots\cdots$，$\xi_n\in K$に対して

$$u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n$$
$$=v_1\times\eta_1+\cdots\cdots+v_n\times\eta_n$$

となるη_1，$\cdots\cdots$，η_nを求める計算，および変換の合成を求める計算である。

先ず，

$$\begin{aligned}&u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n\\ =\ &(v_1\times\alpha_{11}+\cdots\cdots+v_n\times\alpha_{1n})\times\xi_1\\ &+\cdots\cdots\\ &+(v_1\times\alpha_{n1}+\cdots\cdots+v_n\times\alpha_{nn})\times\xi_n\\ =\ &v_1\times(\xi_1\times\alpha_{11}+\cdots\cdots+\xi_n\times\alpha_{n1})\\ &+\cdots\cdots\\ &+v_n\times(\xi_1\times\alpha_{1n}+\cdots\cdots+\xi_n\times\alpha_{nn})\end{aligned}$$

よって，

$$u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n=v_1\times\eta_1+\cdots\cdots+v_n\times\eta_n$$

のとき，

$$\eta_i=\xi_1\times\alpha_{1i}+\cdots\cdots+\xi_n\times\alpha_{ni}$$
$$(i=1\ ,\ \cdots\cdots,\ n)$$

そこで周知の算法（行ベクトルに対する行列の作用）：

$$\boxed{(\xi_1\cdots\cdots\xi_n)}\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\cdots & \boxed{\alpha_{1i}} & \cdots\cdots\alpha_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{n1}\cdots\cdots & \boxed{\alpha_{ni}} & \cdots\cdots\alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=(\eta_1\cdots\cdots\boxed{\eta_i}\cdots\cdots\eta_n)$$

が定義される。

いま，もう一つの基底$(w_1,\ \cdots\cdots w_n)$を考

え，基底$(v_1, \cdots\cdots, v_n)$を基底$(w_1, \cdots\cdots, w_n)$に取り替えることによる変換が行列

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}\cdots\cdots\beta_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \beta_{n1}\cdots\cdots\beta_{nn} \end{pmatrix}$$

で表現されるとしよう。この変換を行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

で表現される先の変換に合成するときの変換は，基底$(u_1, \cdots\cdots, u_n)$を基底$(w_1, \cdots\cdots, w_n)$に取り替えることによる変換であるが，これの表現行列を

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}\cdots\cdots\gamma_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{n1}\cdots\cdots\gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

としよう。このとき

$$\begin{aligned} u_i &= v_1 \times \alpha_{i1} + \cdots\cdots + v_n \times \alpha_{in} \\ &= (w_1 \times \beta_{11} + \cdots\cdots + w_n \times \beta_{1n}) \times \alpha_{i1} \\ &\quad + \cdots\cdots \\ &\quad + (w_1 \times \beta_{n1} + \cdots\cdots + w_n \times \beta_{nn}) \times \alpha_{in} \\ &= w_1 \times (\alpha_{i1} \times \beta_{11} + \cdots\cdots + \alpha_{in} \times \beta_{n1}) \\ &\quad + \cdots\cdots \\ &\quad + w_n \times (\alpha_{i1} \times \beta_{1n} + \cdots\cdots + \alpha_{in} \times \beta_{nn}) \end{aligned}$$

であるから，

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1} \times \beta_{1j} + \cdots\cdots + \alpha_{in} \times \beta_{nj} \qquad (i, j = 1, \cdots\cdots, n)$$

そこで周知の算法（行列の乗法）：

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \boxed{\alpha_{i1}\cdots\cdots\alpha_{in}} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11}\cdots\cdots & \boxed{\beta_{1j}} & \cdots\cdots\beta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1}\cdots\cdots & \boxed{\beta_{nj}} & \cdots\cdots\beta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_{11}\cdots\cdots\gamma_{1j}\cdots\cdots\gamma_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{i1}\cdots\cdots\boxed{\gamma_{ij}}\cdots\cdots\gamma_{in} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{n1}\cdots\cdots\gamma_{nj}\cdots\cdots\gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

が定義される。

4.3 アフィン空間とアフィン変換

4.3.1 枠の取り替え，アフィン変換

アフィン空間の要素は，固定された一つの枠（原点と基底の組）に対して表現される。したがってアフィン空間の場合，点表現の枠の変換は，“（アフィン）枠の取り替え”の形で考えるのが自然である。この変換をアフィン変換と呼ぶ。

4.3.2 変換の表現と変換の計算

アフィン空間(E, D, K)の枠を$(O; u_1, \cdots\cdots, u_n)$から$(O'; v_1, \cdots\cdots, v_n)$に変えることによって，$E$の要素表現の変換がもたらされる。この変換の表現を問題にしよう。

この枠の取り替えを

$(O; u_1, \cdots\cdots, u_n) \to (O'; u_1, \cdots\cdots, u_n)$

$(O'; u_1, \cdots\cdots, u_n) \to (O'; v_1, \cdots\cdots, v_n)$

の二段階で考えると，前者による変換は，

$$\overrightarrow{O'O} = v_1 \times \kappa_1 + \cdots\cdots + v_n \times \kappa_n$$

を満たす$\kappa_j \in K$ $(j = 1, \cdots\cdots, n)$で決まってしまい，後者による変換は

$$u_i = v_1 \times \alpha_{i1} + \cdots\cdots + v_n \times \alpha_{in} \qquad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

を満たす$\alpha_{ij} \in K$ $(i, j = 1, \cdots\cdots, n)$で決まってしまう。そこで，先の線型空間の場合に倣うならば，枠の変更：

$(O; u_1, \cdots\cdots, u_n) \to (O'; v_1, \cdots\cdots, v_n)$

による変換の表現として行列

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \cdots\cdots \kappa_n \\ \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

を差し当たって考えることができる。――“差し当たって”の意味は，以下で明らかになる。

線型空間の場合，〈ベクトルの表現としての行ベクトル〉に〈変換の表現としての行列〉を作用させる形で，変換の計算ができた。では，これと同様のことがアフィン空間の場合にもできるかどうか（但しこのときの行ベクトルは点の座標としての行ベクトル）。そこでつぎに，これを考えてみよう。

先ず，

$$X=O_{+}x$$
$$x=u_{1\times}\xi_{1}+\cdots\cdots+u_{n\times}\xi_{n}$$

に対し

$$X=O_{+}x=(O'{}_{+}\overrightarrow{O'O})_{+}x$$
$$=O'{}_{+}(\overrightarrow{O'O}+x)$$

ここで

$$\overrightarrow{O'O}+x=v_{1\times}\eta_{1}+\cdots\cdots+v_{n\times}\eta_{n}$$

とすると

$$\eta_{i}=\kappa_{i}+\xi_{i}\times\alpha_{1i}+\cdots\cdots+\xi_{n}\times\alpha_{ni}$$
$$(i=1, \cdots, n)$$

この結果を行ベクトル（$\xi_{1}\cdots\cdots\xi_{n}$）に対する行列

$$\begin{pmatrix} \kappa_{1}\cdots\cdots\kappa_{n} \\ \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

の作用の計算で得ようと考えるならば，

$$(\xi_{1}\cdots\cdots\xi_{n})\longrightarrow(1\ \xi_{1}\cdots\cdots\xi_{n})$$
$$(\eta_{1}\cdots\cdots\eta_{n})\longrightarrow(1\ \eta_{1}\cdots\cdots\eta_{n})$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_{1}\cdots\cdots\kappa_{n} \\ \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix}\longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1\ \kappa_{1}\cdots\cdots\kappa_{n} \\ 0\ \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ 0\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

の読み換えが必要になる。

つぎに，枠の変更

$$(O\ ;u_{1},\cdots\cdots,u_{n})\rightarrow(O'\ ;v_{1},\cdots\cdots,v_{n})$$
$$(O'\ ;v_{1},\cdots\cdots,v_{n})\rightarrow(O''\ ;w_{1},\cdots\cdots,w_{n})$$

に対応する変換の合成を考えてみる。後者の変換の表現行列を

$$B=\begin{pmatrix} 1\ \lambda_{1}\cdots\cdots\lambda_{n} \\ 0\ \beta_{11}\cdots\cdots\beta_{1n} \\ \cdots\cdots \\ 0\ \beta_{n1}\cdots\cdots\beta_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\overrightarrow{O''O}=\overrightarrow{O''O'}+\overrightarrow{O'O}$$
$$=\ w_{1\times}\lambda_{1}+\cdots\cdots+w_{n\times}\lambda_{n}$$
$$+(w_{1\times}\beta_{11}+\cdots\cdots+w_{n\times}\beta_{1n})_{\times}\kappa_{1}$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+(w_{1\times}\beta_{n1}+\cdots\cdots+w_{n\times}\beta_{nn})_{\times}\kappa_{n}$$
$$=w_{1\times}(\lambda_{1}+\kappa_{1}\times\beta_{11}+\cdots\cdots+\kappa_{n}\times\beta_{n1})$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+w_{n\times}(\lambda_{n}+\kappa_{1}\times\beta_{1n}+\cdots\cdots+\kappa_{n}\times\beta_{nn}),$$
$$u_{i}=(w_{1\times}\beta_{11}+\cdots\cdots+w_{n\times}\beta_{1n})_{\times}\alpha_{i1}$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+(w_{1\times}\beta_{n1}+\cdots\cdots+w_{n\times}\beta_{nn})_{\times}\alpha_{in}$$
$$=w_{1\times}(\alpha_{i1}\times\beta_{11}+\cdots\cdots+\alpha_{in}\times\beta_{n1})$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+w_{n\times}(\alpha_{i1}\times\beta_{1n}+\cdots\cdots+\alpha_{in}\times\beta_{nn})。$$

そこで変換の合成の表現行列を

$$C=\begin{pmatrix} 1\ \mu_{1}\cdots\cdots\mu_{n} \\ 0\ \gamma_{11}\cdots\cdots\gamma_{1n} \\ \cdots\cdots \\ 0\ \gamma_{n1}\cdots\cdots\gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\mu_{j}=\lambda_{j}+\kappa_{1}\times\beta_{1j}+\cdots\cdots+\kappa_{n}\times\beta_{nj}$$
$$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\times\beta_{1j}+\cdots\cdots+\alpha_{in}\times\beta_{nj}$$
$$(i,\ j=1, \cdots\cdots, n)$$

そしてこの結果は，行列AとBの積をCとおいたときの結果と一致する。

4.4 ユークリッド空間と等長変換

計量形式が与えられているアフィン空間としてのユークリッド空間に対し，これの“点表現の枠の変換”として自然に考えられるものは，計量を変えないアフィン変換としての“等長変

換”である。

ユークリッド空間の計量——ユークリッド計量——Qは，正規直交基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に対し

$$Q\ (u_{1\times}\xi_1+\cdots\cdots+u_{n\times}\xi_n)$$
$$=\xi_1^2+\cdots\cdots+\xi_n^2$$

で定義される（正確には，ユークリッド計量と正規直交基底は，相互依存する概念として同時に定義される）（§3.5）。そこで，等長変換の定義はつぎのようになる。

即ち，アフィン変換は，正規直交基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ を任意に一つ固定して

$$(O\ ;\ u_1,\cdots\cdots,u_n)\longrightarrow(O'\ ;\ v_1,\cdots\cdots,v_n)$$

と表わせるが，このとき

$$Q(v_{1\times}\xi_1+\cdots+v_{n\times}\xi_n)=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$$
$$(\xi_1,\cdots\cdots,\xi_n\in\mathbb{R})$$

であれば，等長変換。

いま

$$u_i=v_{1\times}\alpha_{i1}+\cdots\cdots+v_{n\times}\alpha_{in}$$

とすると，等長変換の条件から

$$Q\ (u_i)\ =\alpha_{i1}^2+\cdots\cdots+\alpha_{in}^2,$$
$$B(u_i,u_j)=Q(u_i+u_j)-Q(u_i)-Q(u_j)$$
$$=2\,(\alpha_{i1}\alpha_{j1}+\cdots\cdots+\alpha_{in}\alpha_{jn})$$

（ここでBは，Qに随伴する双線型形式）。したがって，$\{u_1, \cdots\cdots u_n\}$ が正規直交基底であるための条件の

$$Q(u_i)=1\ ,\ B(u_i,\ u_j)=0\qquad (i\neq j)$$

は，

$$\alpha_{i1}^2+\cdots\cdots+\alpha_{in}^2=1\ ,$$
$$\alpha_{i1}\alpha_{j1}+\cdots\cdots+\alpha_{in}\alpha_{jn}=0\qquad (i\neq j)$$

と言い換えらえる。そしてさらに行列

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

をAとおくとき，この条件は，$A{}^tA=1$（単位行列），即ち${}^tA=A^{-1}$——Aは直交行列——と同じである。特にこれから，$\{v_1,\cdots\cdots,v_n\}$ も正規直交基底であることがわかる(註)。

こうして，等長変換は，正規直交基底を保存する変換として特徴づけられることになる。また，直交行列は，等長変換の表現行列として特徴づけられる。

（註）　実際，$Q(v_i)=Q(v_{1\times}0+\cdots\cdots+v_{i\times}1+\cdots\cdots+v_{n\times}0)=0^2+\cdots\cdots+1^2+\cdots\cdots+0^2=1$。また，$A^{-1}={}^tA$　より，

$$v_i=u_{1\times}\alpha_{1i}+\cdots\cdots+u_{n\times}\alpha_{ni},$$

そして${}^tAA=1$より，

$$B(v_i,v_j)=\alpha_{1i}\alpha_{1j}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\alpha_{nj}=0\quad (i\neq j)$$

5 写像

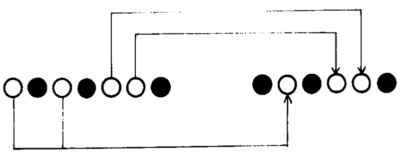
5.1 写像＝“絵の写像”

写像とは，絵の写像のことである。

キャンバスである空間の比喩として“電光掲示板”（§2.2.1）を用いるとき，絵の写像は，一方の電光掲示板$\mathscr{X}$の絵$\mathscr{P}$（発光している電球の集合）をもう一方の電光掲示板$\mathscr{Y}$に写すことである。

このときの“写す”には，“模写”の意味はない。単に，$\mathscr{X}$の発光している各電球に対して$\mathscr{Y}$の或る電球を発光させることが，“写す”である。ここでの“写す”には，“似せる”という意味合いはない。

例えば，“写す”が



である場合，$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$の要素をそれぞれ左から順に

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7$$
$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4,\ Y_5,\ Y_6$$

と命名すれば，絵$\mathscr{P}$は$\mathscr{X}$の部分

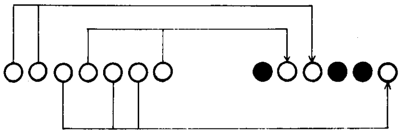
$$\{X_1,\ X_3,\ X_5,\ X_6\}$$

のこととなり，“写す”は対応：

$$f=\ \{(X_1,Y_2),(X_3,Y_2),(X_5,Y_4),(X_6,\ Y_5)\}\ ;$$
$$\mathscr{P}\longrightarrow\mathscr{Y}$$

のこととなる。

“空間の写像”という言い回しがあるが，文字通りのそれは，空間をそれ自身の上の絵と読み直すときのこれの写像である：



絵の写像の他に“空間の写像”があるのではない。“空間の写像”は絵の写像である。——繰り返すが，写像とは絵の写像のことである。

空間$\mathcal{X}$の上の絵$\mathcal{P}$の写像を，空間$\mathcal{X}$の写像（$\mathcal{X}$をそれ自身の上の絵と読み直すときのこれの写像）に埋め込んで考える場合がある。このとき，$\mathcal{P}$の写像は，$\mathcal{X}$の写像の$\mathcal{P}$への制限という形で捉えられるようになる。

5.2 線型写像

5.2.1 線型写像の概念

“線型写像”は，“比例関数”の概念の拡張である。

比例関数は，Kが実数体$\mathbb{R}$あるいは有理数体$\mathbb{Q}$であるときの１次元線型空間（D, K），（D' , K）に対する関数$f: D \longrightarrow D'$で，条件：

$$f(x_\times \xi)=f(x)_\times \xi$$ (註1)

を満たすもの，というように定式化できる。実際，比例関数が量と量の間で考えられているとき，量は実数体あるいは有理数体上の１次元線型空間として効いている。また，比例関数が実数と実数，あるいは有理数と有理数の間で考えられているとき，実数は（１次元）線型空間としての$((\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}, +, \times), \times)$の第１因子の方の$\mathbb{R}$の要素として，同様に有理数は（１次元）線型空間としての$((\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}, +, \times), \times)$の第１因子の方の$\mathbb{Q}$の要素として，それぞれ実効している(註2)。

“比例関数”の“線型写像”への拡張は，係数体および次元の一般化である。そして，“線型写像”へと引き継ぐものは，比例関数の形式としての

$$f(x_\times \xi)=f(x)_\times \xi$$

と，比例関数の価値としての

《単位の写る先がわかれば全ての要素の写る先がわかる》

である。

次元の一般化で，“単位”は“基底”の概念へと拡張される。そこで，価値の方は，

《基底の要素の写る先がわかれば全ての要素の写る先がわかる》

のようになる。しかしこの価値の実現のためには，形式

$$f(x_\times \xi)=f(x)_\times \xi$$

だけでは足りない。この事態は，形式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

を加えることで解決される。実際，この手続きは，“線型写像”を比例関数に対して別モノ化するものではない。何故なら比例関数の場合，“$f(x+y)=f(x)+f(y)$”は“$f(x_\times \xi)=f(x)_\times \xi$”の含意になっているからである(註3)。

こうして，“比例関数”の拡張としての“線型写像”は，条件

$$f(x_\times \xi)=f(x)_\times \xi$$
$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

を満たす写像$f: D \longrightarrow D'$として定義されることになる。

（註１）　小学校算数では，これを“一方が２倍，３倍，……になるときもう一方も２倍，３倍，……になる”という言い回しで指導している。

（註２）　一般に，体（K, $+$, $\times$）からは，１次元線型空間$((K, +), (K, +, \times), \times)$が導かれる。——体（$K$, $+$, $\times$）から群（K, $+$）を分離し，乗法$\times$によって群（K, $+$）の要素に対する体（K, $+$, $\times$）の要素の作用を定義する。

（註３）　$x=u_\times \xi$, $y=u_\times \eta$とすると，

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(u_\times(\xi+\eta))=f(u)_\times(\xi+\eta) \\ &= f(u)_\times \xi+f(u)_\times \eta=f(u_\times \xi)+f(u_\times \eta) \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

5.2.2 線型写像の行列表現

$(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n)$，$(v_1,\ \cdots\cdots,\ v_m)$ がそれぞれ線型空間 $(D,\ K)$，(D',K) の基底であるとき，線型写像 $f:D\longrightarrow D'$ は

$$f(u_i)\quad (i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

で決まってしまう(註)。そこでさらに

$$f(u_i)=v_1\times\alpha_{i1}+\cdots\cdots+v_m\times\alpha_{im}\quad (i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

のように表わすと，係数

$$\alpha_{ij}\quad (i=1,\cdots\cdots,n\ ;\ j=1,\cdots\cdots,m)$$

が f を決定するものになる。われわれは係数 α_{ij} の組を行列

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1m}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nm}\end{pmatrix}$$

の形に書いて，これを f の表現——“表現行列”——として用いている。

“線型写像”が“比例関数”の概念の拡張であるのに対応して，“表現行列”は，“比例定数”の概念の拡張である。実際，“１次元実線型空間から１次元実線型空間への線型写像”である“比例関数”の表現行列は（１×１）行列になるが，これの（唯一の）要素が“比例定数”である。

（註）　実際，D の元は $u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n$ の形に書けて，さらに線型写像の条件から $f(u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n)=f(u_1)\times\xi_1+\cdots\cdots+f(u_n)\times\xi_n$。

5.2.3 表現行列を用いた計算

$(D,\ K)$，(D',K) を同一係数体上の線型空間とし，$f:D\longrightarrow D'$ を線型写像とする。

いま，線型空間 $(D,\ K)$，(D',K) のそれぞれに，基底 $(u_1,\cdots\cdots,u_n)$，$(v_1,\ \cdots\cdots,v_m)$ を導入する。そしてこれに対する f の表現行列を

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1m}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nm}\end{pmatrix}$$

とする。このとき，D の要素

$$x=u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n$$

に対し，

$$\begin{aligned}f(x)&=f(u_1)\times\xi_1+\cdots\cdots+f(u_n)\times\xi_n\\ &=v_1\times(\xi_1\times\alpha_{11}+\cdots\cdots+\xi_n\times\alpha_{n1})\\ &\quad+\cdots\cdots\\ &\quad+v_m\times(\xi_1\times\alpha_{1m}+\cdots\cdots+\xi_n\times\alpha_{nm})\end{aligned}$$

したがって $f(x)$ が，x を表わす行ベクトルに f の表現行列を右から作用させる計算(§4.2.2)によって，求められることになる。

つぎに，(D'',K) をもう一つの線型空間として，f と線型写像 $g:D'\longrightarrow D''$ の合成を考える。

線型空間 (D'',K) に，基底 $(w_1,\cdots\cdots,w_p)$ を導入する。基底 $(v_1,\cdots\cdots,v_m)$，$(w_1,\cdots\cdots,w_p)$ に対する g の表現行列を

$$\begin{pmatrix}\beta_{11}\cdots\cdots\beta_{1p}\\ \cdots\cdots\\ \beta_{m1}\cdots\cdots\beta_{mp}\end{pmatrix}$$

とするとき，

$$\begin{aligned}g(f(u_i))&=g(v_1)\times\alpha_{i1}+\cdots+g(v_m)\times\alpha_{im}\\ &=(w_1\times\beta_{11}+\cdots\cdots+w_p\times\beta_{1p})\times\alpha_{i1}\\ &\quad+\cdots\cdots\\ &\quad+(w_1\times\beta_{m1}+\cdots\cdots+w_p\times\beta_{mp})\times\alpha_{im}\\ &=w_1\times(\alpha_{i1}\times\beta_{11}+\cdots\cdots+\alpha_{im}\times\beta_{m1})\\ &\quad+\cdots\cdots\\ &\quad+w_p\times(\alpha_{i1}\times\beta_{1p}+\cdots\cdots+\alpha_{im}\times\beta_{mp})\end{aligned}$$

そこで f と g の合成の表現行列を

$$\begin{pmatrix}\gamma_{11}\cdots\cdots\gamma_{1p}\\ \cdots\cdots\\ \gamma_{n1}\cdots\cdots\gamma_{np}\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\times\beta_{1j}+\cdots\cdots+\alpha_{im}\times\beta_{mj}\quad (i=1,\cdots\cdots,n\ ;\ j=1,\cdots\cdots,p)$$

よって線型写像の合成が，表現行列の積（§4.2.2）で計算できることになる。

5.3 アフィン写像

5.3.1 アフィン写像の概念

(E, D, K)，(E', D', K)を同一係数体上のアフィン空間とする。写像$F: E\longrightarrow E'$ は，条件：

任意の$O\in E$に対し，

$$f: \overrightarrow{OX}\longmapsto\overrightarrow{F(O)F(X)};$$
$$D \longrightarrow D'$$

は線型写像．

を満たすとき，アフィン写像と呼ばれる。

線型写像fは$O\in E$のとり方に依らずに一意に決まる(註1)。fはアフィン写像Fに随伴すると言われる。

アフィン写像$F: E\longrightarrow E'$ は，或る線型写像$f: D\longrightarrow D'$ に対し

$$F(X{}_{+}x)=F(X){}_{+}f(x)$$
$$(X\in E,\ x\in D)$$

が成り立つ写像と定義しても同じであり，そしてfも，Fに随伴する線型写像と一致する(註2)。

（註1）　$O'\in E$に対し定義される線型写像：$\overrightarrow{O'X'}\longmapsto\overrightarrow{F(O')F(X')}$が$f$と一致することを示す。$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{O'X'}$から$\overrightarrow{F(O)F(X)}=\overrightarrow{F(O')F(X')}$が導かれることを言えばよい。

先ず，$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{O'X'}$と$\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X'}$より$\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{OO'}$。そして，

$F(X')=F(O){}_{+}\overrightarrow{F(O)F(X')}$
$=F(O){}_{+}(f(\overrightarrow{XX'})+f(\overrightarrow{OX}))$
$=(F(O){}_{+}f(\overrightarrow{OO'})){}_{+}f(\overrightarrow{OX})$
$=(F(O){}_{+}\overrightarrow{F(O)F(O')}){}_{+}\overrightarrow{F(O)F(X)}$
$=F(O'){}_{+}\overrightarrow{F(O)F(X)}$

即ち，$\overrightarrow{F(O)F(X)}=\overrightarrow{F(O')F(X')}$。

（註2）　$O\in E$に対し，$F(X)=F(O{}_{+}\overrightarrow{OX})=F(O){}_{+}f(\overrightarrow{OX})$，よって　$f(\overrightarrow{OX})=\overrightarrow{F(O)F(X)}$。

5.3.2 アフィン写像の行列表現と，これを用いた計算

(E, D, K)，(E', D', K)を同一係数体上のアフィン空間，$F: E\longrightarrow E'$ をアフィン写像，そして$f: D\longrightarrow D'$ をFに随伴する線型写像とする。

いま，アフィン空間(E, D, K)，(E', D', K)のそれぞれに，枠（O；u_1，……，u_n），（O'；v_1，……，v_m）を導入する。

Eの各点

$$X=O{}_{+}(u_{1}\times\xi_{1}+\cdots\cdots+u_{n}\times\xi_{n})$$

に対し，

$$F(X)=F(O){}_{+}f(u_{1}\times\xi_{1}+\cdots\cdots+u_{n}\times\xi_{n})$$
$$=F(O){}_{+}(f(u_{1})\times\xi_{1}+\cdots\cdots+f(u_{n})\times\xi_{n})$$

よってFは，$F(O)$と$f(u_i)$（$i=1,\cdots\cdots,n$）で決まる。$f(u_i)$（$i=1,\cdots\cdots,n$）をわれわれは，“基底$(u_1,\cdots\cdots,u_n)$，$(v_1,\cdots\cdots,v_m)$に対するfの表現行列”で定めている。したがってFは，

$$F(O)=O'{}_{+}(v_{1}\times\kappa_{1}+\cdots\cdots+v_{m}\times\kappa_{m})$$

であるκ_jの組（κ_1，……，κ_m）とfの表現行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1m} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

の組で表現される。いまこれを

$$+\quad\begin{pmatrix} \kappa_{1}\ \cdots\cdots\ \kappa_{m} \\ \alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1m} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

のように書いておく。

このとき$F(X)$は，

$=O'{}_{+}((v_{1}\times\kappa_{1}+\cdots\cdots+v_{m}\times\kappa_{m})$
$+v_{1}\times(\xi_{1}\times\alpha_{11}+\cdots\cdots+\xi_{n}\times\alpha_{n1})$
$+\cdots\cdots$
$+v_{m}\times(\xi_{1}\times\alpha_{1m}+\cdots\cdots+\xi_{n}\times\alpha_{nm}))$
$=O'{}_{+}($
$\quad v_{1}\times(\kappa_{1}+\xi_{1}\times\alpha_{11}+\cdots\cdots+\xi_{n}\times\alpha_{n1})$

$+\cdots\cdots$
$+v_{m\times}(\kappa_m+\xi_1\times\alpha_{1m}+\cdots\cdots+\xi_n\times\alpha_{nm}))$
そしてこの結果は，

$$(\xi_1\cdots\cdots\xi_n)\longrightarrow(1\ \xi_1\cdots\cdots\xi_n)$$

$$\begin{pmatrix}\kappa_1 & \cdots\cdots & \kappa_m\\ \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1m}\\ & \cdots\cdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots\cdots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}\longrightarrow A=\begin{pmatrix}1 & \kappa_1 & \cdots\cdots & \kappa_m\\ 0 & \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1m}\\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & \alpha_{n1} & \cdots\cdots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}$$

の読み換えをすることで，Xの座標を表わす行ベクトルに対する行列の作用の計算で得られる：

$$(1\ \xi_1\cdots\cdots\xi_n)\quad\begin{pmatrix}1 & \kappa_1 & \cdots\cdots & \kappa_m\\ 0 & \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1m}\\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & \alpha_{n1} & \cdots\cdots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}$$

つぎに，(E'',D'',K) をもう一つのアフィン空間として，Fとアフィン写像$G:E'\longrightarrow E''$ の合成を考えよう。Gに随伴する線型写像を$g:D'\longrightarrow D''$ とする。

アフィン空間 (E'',D'',K) に，枠$(O''\ ;w_1,\cdots\cdots,w_p)$を導入する。枠$(O'\ ;v_1,\cdots\cdots,v_m)$，$(O''\ ;w_1,\cdots\cdots,w_p)$に対するGの表現行列を

$$B=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots\cdots & \lambda_p\\ 0 & \beta_{11} & \cdots\cdots & \beta_{1p}\\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & \beta_{m1} & \cdots\cdots & \beta_{mp}\end{pmatrix}$$

とするとき，

$G(F(O))=G(O'_+(v_{1\times}\kappa_1+\cdots+v_{m\times}\kappa_m))$
$=G(O')_+(g(v_1)_\times\kappa_1+\cdots+g(v_m)_\times\kappa_m)$
$=O''{}_+((w_{1\times}\lambda_1+\cdots+w_{p\times}\lambda_p)$
$+(w_{1\times}\beta_{11}+\cdots+w_{p\times}\beta_{1p})_\times\kappa_1$
$+\cdots\cdots$
$+(w_{1\times}\beta_{m1}+\cdots+w_{p\times}\beta_{mp})_\times\kappa_m$
$=O''{}_+$
$(w_{1\times}(\lambda_1+\kappa_1\times\beta_{11}+\cdots+\kappa_m\times\beta_{m1})$
$+\cdots\cdots$
$+w_{p\times}(\lambda_p+\kappa_1\times\beta_{1p}+\cdots+\kappa_m\times\beta_{mp}))$
$g(f(u_i))$
$=w_{1\times}(\alpha_{i1}\times\beta_{11}+\cdots+\alpha_{im}\times\beta_{m1})$
$+\cdots\cdots$
$+w_{p\times}(\alpha_{i1}\times\beta_{1p}+\cdots+\alpha_{im}\times\beta_{mp})$
そこで変換の合成の表現行列を

$$C=\begin{pmatrix}1 & \mu_1 & \cdots\cdots & \mu_p\\ 0 & \gamma_{11} & \cdots\cdots & \gamma_{1p}\\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & \gamma_{n1} & \cdots\cdots & \gamma_{np}\end{pmatrix}$$

とおくと，

$\mu_j=\lambda_j+\kappa_1\times\beta_{1j}+\cdots\cdots+\kappa_m\times\beta_{mj}$
$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\times\beta_{1j}+\cdots\cdots+\alpha_{im}\times\beta_{mj}$
$(i=1,\cdots\cdots,n\ ;\ j=1,\cdots\cdots,p)$

そしてこの結果は，行列AとBの積をCとおいたときの結果と一致する。

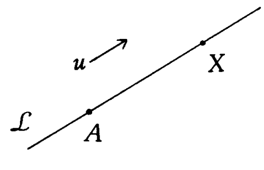
5.3.3 アフィン写像のイメージ

アフィン写像では，直線が保存される。

$\mathcal{L}$をアフィン空間 (E,D,K) の中の直線として，$\mathcal{L}$の上の一点Aを固定する。$\mathcal{L}$は或る$u\in D$（“$\mathcal{L}$の方向ベクトル”）に対し，ξがK全体を動くときの点

$$X=A_+u_\times\xi$$

の全体と一致する：



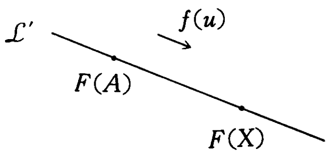
Fをアフィン空間 (E,D,K) からアフィン空間 (E',D',K) へのアフィン写像，fをFに随伴する線型写像とするとき，点$X=A_+u_\times\xi$に対し，

$$F(X)=F(A)_+f(u)_\times\xi$$

よって，

$\mathcal{L}' = \{F(A)+f(u)\times\xi \mid \xi\in K\}$

が，Fによる$\mathcal{L}$の像。そして$f(u)\neq 0$ならば，$\mathcal{L}''$は直線：



また，$f(u)=0$のとき$\mathcal{L}'$は点$F(A)$であり，Fによって$\mathcal{L}$が一点に“退化”していることになる。

式$F(X)=F(A)+f(u)\times\xi$　はまた，方向ベクトルuの直線がFによって方向ベクトル$f(u)$の直線にうつることを示している（但し，$f(u)\neq 0$の場合)。したがって特に，Fが直線の平行関係を保存することが結論される。

さらに，直線$\mathcal{L}$がFによって直線$\mathcal{L}'$にうつるとき，$\mathcal{L}$上の異なる三点A，B，Cに対し，

$\overrightarrow{AB}\times\xi=\overrightarrow{AC}$

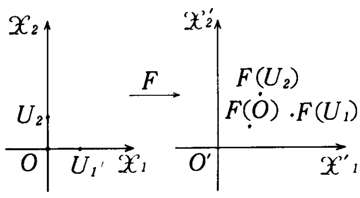
$\Longrightarrow \overrightarrow{F(A)F(B)}\times\xi=\overrightarrow{F(A)F(C)}$

即ち，

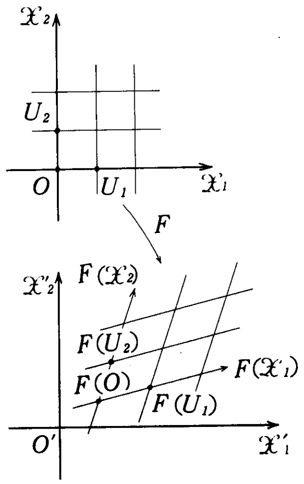
$\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{F(A)F(B)}:\overrightarrow{F(A)F(C)}$

となる(注)。

そこで以上の性質から，写像Fは，Eのアフィン枠$(O;U_1,\cdots\cdots,U_n)$を成す点O，U_1，……，U_n（§3.3.4.1）がそれぞれどこにうつるかということで，捉えられるようになる。例えばn＝2の場合，$F(O)$，$F(U_1)$，$F(U_2)$の定位



から，Fの表現（メッシュの写像として表わすことによるFの視覚化）：



が引き出せる。

さらに，写像Fのこの図表示からは，Fの表現行列を直接得ることができる。また逆に，Fの表現行列からFの図表示が直接得られる。実際，(E',D',K)に枠$(O';V_1,\cdots\cdots,V_m)$をとるとき，枠$(O;U_1,\cdots\cdots,U_n)$，$(O';V_1,\cdots\cdots,V_m)$に対する$F$の表現行列

$$\begin{pmatrix}1 & \kappa_1 & \cdots\cdots & \kappa_m\\ 0 & \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1m}\\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & \alpha_{n1} & \cdots\cdots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}$$

とFの図表示は，つぎのような具合に対応している（n＝m＝2の場合）：

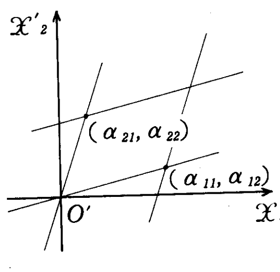
$O(0,\ 0) \longrightarrow (\kappa_1,\ \kappa_2)$

$U_1(1,\ 0) \longrightarrow (\kappa_1+\alpha_{11},\ \alpha_{21})$

$U_2(0,\ 1) \longrightarrow (\alpha_{21},\ \kappa_2+\alpha_{22})$

即ち，軸$\mathfrak{X}_i$上の目盛り1の点がうつった先の点のj座標が，$\kappa_j+\alpha_{ij}$ということである。

特に，O'として$F(O)$をとれば，



（註）$\overrightarrow{F(A)F(B)}_{\times}\xi = f(\overrightarrow{AB})_{\times}\xi = f(\overrightarrow{AB}_{\times}\xi) = f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{F(A)F(C)}$。

5.3.4 アフィン写像の例

算数．数学科で主題になる“図形”の“移動”や“変形”は，アフィン写像の概念を以って定式化できる。——逆に言えば，算数．数学科は，“移動”，“変形”のうち，アフィン写像の概念に定式化できるようなものを取り上げる。

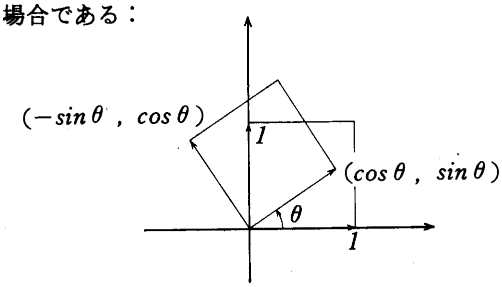
$(E, D, \mathbb{R})$ を２次元ユークリッド空間，$(O\,;u, v)$ を正規直交基底 $\{u, v\}$ に対する枠，そして$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$をこの枠に対する二つの座標軸とする。以下，“図形”の“移動”・“変形”に対しての，アフィン写像$F：E \longrightarrow E$とそれに随伴する線型写像$f：D \longrightarrow D$による解釈を示す。

先ず，$F(O)=O$の場合の例から。

例１．　Oのまわりの回転角θの回転は，fの表現行列が

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

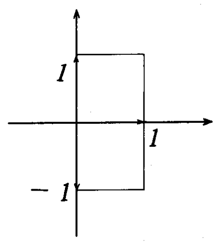
の場合である：



例２．　Oを通る直線$\mathcal{L}$に関する対称移動は，$\mathcal{X}$軸に対する$\mathcal{L}$の傾きがθのとき，Oのまわりの　$-\theta$の回転と，$\mathcal{X}$軸に関する対称移動と，Oのまわりのθの回転の合成になる。ここで，x軸に関する対称移動は，fの表現行列が

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

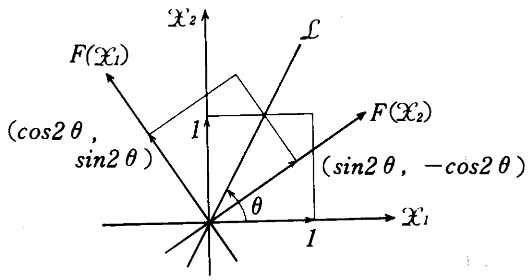
の場合である：



したがって，直線$\mathcal{L}$に関する対称移動は，fの表現行列が積

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{pmatrix}$$

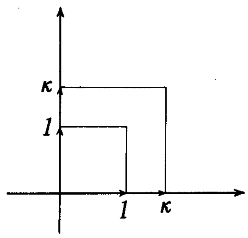
の場合である。



例３．　Oを中心とする相似比κの相似拡大は，fの行列表現が

$$\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

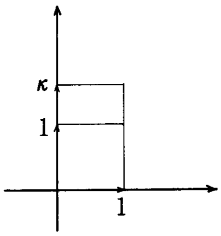
の場合である：



例４．　相似拡大は，$\mathcal{X}$軸と$\mathcal{Y}$軸の両方向へのκ倍の拡大というように規定できるが，$\mathcal{X}$軸方向はそのままにして$\mathcal{Y}$軸方向のみをκ倍に拡大することを考えるとき，“ひずみ変換”の概念が起こる。これはfの表現行列が，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

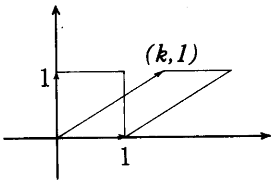
の場合である：



例5．　傾き$1/\kappa$の直線の上に$\mathcal{Y}$軸を$\mathcal{X}$軸に平行にずらす変換として，“ずらし変換”が定義される。これは，fの表現行列が

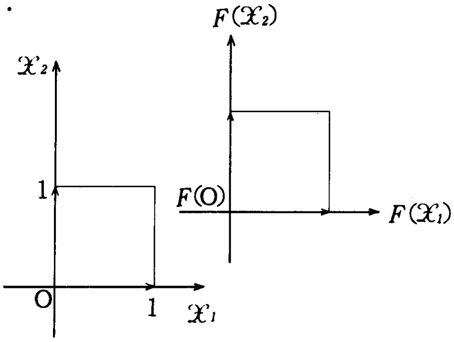
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

の場合である：



算数・数学科の教材には，以上の“移動”，“変形”の他に，“平行移動”が登場する。“平行移動”の場合には，条件“$F(O)=O$”を外す。

例6．　“平行移動”は，fが恒等写像の場合である：



6 変換(2)――絵の変換

6.1 絵の変換

6.1.1 絵の変換

同じ空間（キャンバス）の上の絵の写像を，特に，変換と呼ぶことにする。

“絵の写像”の特殊としての“絵の変換”について主題となるものは，専ら《“絵の変換”と“枠の変換”(*Ch*.4) の関係》である。

6.1.2 “絵の変換”と“枠の変換”の関係の相対性

キャンバスである空間の比喩として，再び“電光掲示板”を持ち出すことにしよう。

電光掲示板$\mathcal{X}$の上の“絵の変換”は，どのように特定されるのか。それは，《最初オンになっている各電球Xを特定し，そしてXに対応してつぎにオンになる電球X'を特定する》という形でなされる。では，電球はどのように特定されるのか。電球の位置表現の枠を固定して，この枠に対して表現することによってである。

しかし，“枠を固定する”とはどのようにすることなのか。この問題は，数学の問題ではない。生活実践の問題である。

“枠の固定”を言うことが困難になる場面がある。実際，枠は手掛かりがなければ固定できない。空虚の中では，枠を固定できない。

枠は，手掛かりを用いて固定される。しかし，その手掛かりは固定されているのか。手掛かりは別の新たな手掛かりによって固定される他ない。

“絵の変換”は枠の固定を前提にして考えられる。この前提を疑うときどうなるか。“絵の変換”は，絵と枠の“相対的位置関係”――枠に対する絵の表現で規定される関係――の変化になる。そしてこのときには，“不動な枠$\mathfrak{S}$に対する絵の側の変化$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$”なのか，“枠自体の変化　$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}'$を含んでいる変化”（このときにはさらに，“絵も変化し枠も変化する”，“絵は不動で枠が変化する”の二つの場合が考えられる）なのか，その何れとも特定できない。

6.1.3 “枠の変換”で表現される“絵の変換”

絵と枠の関係の変化のうちには，“絵が不動であるのに対し枠の方が変わる”という読み方が可能であるようなものがある。

実際，枠$\mathfrak{S}$と絵$\mathcal{P}$が与えられているとき，枠

$\mathfrak{S}'$ を新たに導入し，そして絵$\mathcal{P}'$を条件《$\mathfrak{S}$に対する$\mathcal{P}'$の関係は$\mathfrak{S}'$に対する$\mathcal{P}$の関係に等しい》を満たすようにつくれば，関係の二つの変化：

$$(\mathfrak{S},\ \mathcal{P})\rightarrow(\mathfrak{S},\ \mathcal{P}')$$
$$(\mathfrak{S},\ \mathcal{P})\rightarrow(\mathfrak{S}',\ \mathcal{P})$$

(それぞれ，“枠$\mathfrak{S}$が不動で絵$\mathcal{P}$が$\mathcal{P}'$に変わる”と“絵$\mathcal{P}$が不動で枠$\mathfrak{S}$が$\mathfrak{S}'$に変わる”）は，区別のつかないものになる。

6.2 線型変換

同一の線型空間上の線型写像を，線型変換と呼ぶ。線型写像の特殊としての線型変換は，“枠の線型変換”（$Ch.4$）に対するところの“絵の線型変換”である。

絵の線型変換も枠の線型変換も，座標変換：

$$(\xi_1,\cdots\cdots,\xi_n)\longmapsto(\eta_1,\cdots\cdots,\eta_n)\ ;$$
$$\eta_i=\xi_1\times\alpha_{1i}+\cdots\cdots+\xi_n\times\alpha_{ni}$$
$$(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

の形に表現される。枠の線型変換の記述としての座標変換は，絵の線型変換の記述として読める。そして，絵の線型変換の記述としての座標変換は，その係数がつくる行列

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

の階数が線型空間の次元と同じであれば——これは，絵の線型変換が１対１であるための必要十分条件——枠の線型変換の記述として読める。

実際，座標変換

$$(\xi_1\cdots\cdots\xi_n)\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\cdots\alpha_{1n}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn}\end{pmatrix}=(\eta_1\cdots\cdots\eta_n)$$

に対する“枠の変換”の読み方は，

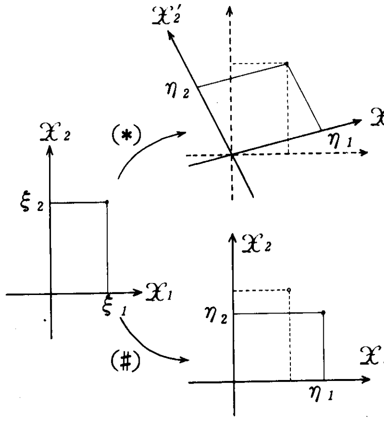
(*)《線型空間$(D,\ K)$の二つの基底 $\{u_1,\cdots\cdots,u_n\}$，$\{v_1,\ \cdots\cdots,\ v_n\}$ に対し，

$$u_i=v_1\times\alpha_{i1}+\cdots\cdots+v_n\times\alpha_{in}$$
$$(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$
$$u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n$$
$$=v_1\times\eta_1+\cdots\cdots+v_n\times\eta_n》$$

“絵の変換”の読み方は，

(#)《線型空間 $(D,\ K)$ の基底 $\{u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\}$ と線型変換（写像）$f:D\longrightarrow D$に対し，

$$f(u_i)=u_1\times\alpha_{i1}+\cdots\cdots+u_n\times\alpha_{in}$$
$$(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$
$$f(u_1\times\xi_1+\cdots\cdots+u_n\times\xi_n)$$
$$=u_1\times\eta_1+\cdots\cdots+u_n\times\eta_n》$$



そこで“枠の変換”(*)は，

$$f(u_i)=u_1\times\alpha_{i1}+\cdots\cdots+u_n\times\alpha_{in}$$
$$(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

で定義される線型変換(写像)fによる“絵の変換”と区別できず，逆に，“絵の変換”(#)は，基底 $\{f(u_1),\cdots\cdots,f(u_n)\}$ ——これが基底になるための条件が，“行列(α_{ij})の階数は空間の次元と一致する”——を基底 $\{u_1,\cdots\cdots,u_n\}$ に取り替える“枠の変換”と区別できない。

6.3 アフィン変換

同一のアフィン空間上のアフィン写像を，アフィン変換と呼ぶ。これは，（“枠のアフィン変換”に対する）“絵のアフィン変換”である。

絵の１対１アフィン変換の表現としての座標変換と，枠のアフィン変換としての座標変換は，それ自体では，区別できない。

実際，座標変換

$$(1\ \xi_1 \cdots\cdots \xi_n)\begin{pmatrix} 1 & \kappa_1 \cdots\cdots \kappa_n \\ 0 & \alpha_{11} \cdots\cdots \alpha_{1n} \\ & \cdots\cdots \\ 0 & \alpha_{n1} \cdots\cdots \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (1\ \eta_1 \cdots\cdots \eta_n)$$

に対する“枠の変換”の読み方は，

《アフィン空間(E, D, K)の二つの枠$(O\ ; u_1, \cdots\cdots, u_n)$, $(O'\ ; v_1, \cdots\cdots, v_n)$に対し，

$$O = O'_+(v_{1\times}\kappa_1 + \cdots\cdots + v_{n\times}\kappa_n)$$

$$u_i = v_{1\times}\alpha_{i1} + \cdots\cdots + v_{n\times}\alpha_{in} \quad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

$$O_+(u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n) = O'_+(v_{1\times}\eta_1 + \cdots\cdots + v_{n\times}\eta_n)$$》

“絵の変換”の読み方は，

《アフィン空間(E,D,K)の枠$(O\ ; u_1, \cdots\cdots, u_n)$とアフィン変換(写像) $(F, f) : (E, D) \longrightarrow (E, D)$に対し，

$$F(O) = O_+(u_{1\times}\kappa_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\kappa_n)$$

$$f(u_i) = u_{1\times}\alpha_{i1} + \cdots\cdots + u_{n\times}\alpha_{in} \quad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

$$F(O_+(u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n)) = O_+(u_{1\times}\eta_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\eta_n)$$》

“絵の１対１アフィン変換”ないし“枠のアフィン変換”の把捉が，座標変換を現前の事実としてこれから結論されるものであるとき，“絵の１対１アフィン変換”であるのか“枠のアフィン変換”であるのか，あるいは両者の混合であるのか，何れとも確定できない。こうしてわれわれは一つの相対性の中に住むことになる。