"理 論" の 定 式 化 (1)

宮 下 英 明

A Formula of "Theory" (I)

Hideaki MIYASHITA

目 次

1991年 4 月15日受理

本論文の主題は，“実効的手続き”の立場から“理論”を定式化することである。(結果として，この定式化は有限主義的である。) このことによって，理論が生成する記号列（ことば）と，それについてわれわれが言及するときのことば（“メタ言語”）が，明確に区別できるようになる。

この定式化は，“実効的手続き”に即くという制約から，以下に見るようにかなり煩瑣なものになり，その妥当性はにわかには判断し難い。

このために，われわれは論を，定式化の方法の記述と，方法の妥当性の検証――具体的な例との付き合わせ――を逐一繰り返す形で進めていくことにする。このデモンストレーションは自明なことの繰り返しになるが,《自明な手続きを明示し，省略しない》ことが正にわれわれの主題なのである。

1　言語

1.1　言語

言語を，一つの

(1)　文生成システム/文生成変形システム(註1)

$\mathcal{G}$

を土台とする，以下のようなシステムの組として，定式化する(註2)：

(2)　$\mathcal{G}$の上のシェマシステムの集合

$S = \{S_i \mid i \in I\}$

(3)　$\mathcal{G}$の上の文生成変形システムの集合

$D = \{D_j \mid j \in J\}$

(4)　$\mathcal{G}$の上の理論の集合

$T = \{T_k \mid k \in K\}$

文生成システムは，“文法”の定式化である。シェマシステムは，“変数を用いた一般的表現”の定式化である。文生成変形システムは，“計算”の定式化である。

文は記号列であり，文生成，文変形は，それぞれ記号列の生成，記号列の変形である。そして，この生成，変形においては，文を構成する記号とは異なる補助記号が使用される。

(註1)　ここでの“文”(§1.3) は，日常語で言う“文”とは，必ずしも一致しない。実際，日常語で言う“語”や“文の列”も，ここでの“文”になり得る。

例えば，加算式の生成システムでは，“語”が“文”になる。また，証明の生成システムでは，“文の列”が“文”になる。なお，§1.6において，いくつかの例を示す。

(註2)　文全体の集合を，文生成システム$\mathcal{G}$から生成される言語と呼び，L($\mathcal{G}$)で表わすことがある。われわれは，“言語”の語をこのような意味で用いないために，文全体の集合に対する呼称としては，“文彙”という言い回しを用意する。

1.2　記号列の導出

一般に，集合Eの要素の有限列――空な列εを含める――全体の集合をE^*で表わし，また，$E^+ = E^* - \{\varepsilon\}$とおく。Eの要素を“記号”と読むとき，$E^*$の要素を“記号列”と読む。

記号の集合Eと，集合$P \subset E^* \times E^*$に対し，

“Pをプロダクションとする記号列の導出 (derivation)”

の概念を，つぎのように定義する。

即ち，Pの要素を“規則 (production rule)”と呼び，$(\varphi, \psi) \in P$を

$$\varphi \rightarrow \psi$$

で表わすとき，

(1)　記号列α, βに対し，規則$\sigma \rightarrow \tau$と記号列γ, δが存在して，

$$\alpha = \gamma\sigma\delta, \ \beta = \gamma\tau\delta$$

となるとき，“αに規則$\sigma \rightarrow \tau$を適用して記号列βが直接導出される”と言い，

$$\alpha \Rightarrow \beta$$

で表わす。

また，任意の記号列αに対し，

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

であると約束する。

(2)　記号列α_1, α_2, ……, α_mにおいて

$$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2, \ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3, \ \cdots\cdots, \ \alpha_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

であるとき，“α_1はα_mを導く”と言い，

$$\alpha_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha_m$$

で表わす。したがって特に，各記号列αに対し，

$$\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$$

である。

なお，$\rightarrow$, $\Rightarrow$, $\stackrel{*}{\Rightarrow}$がプロダクションPに対す

るものであることを明示しようとするときは，

$$\underset{P}{\rightarrow},\ \underset{P}{\Rightarrow},\ \underset{P}{\overset{*}{\Rightarrow}}$$

のように書くことにする。

1.3 文生成システム

文生成システムとは，つぎのようなシステム

$$({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ S)$$

のことである(註1)：

(1) ${}^{N}V$，${}^{T}V$は，互いに交わらない有限集合。
${}^{N}V$の要素は非終端記号（nonterminal symbol）と呼ばれ，${}^{T}V$の要素は終端記号(terminal symbol）と呼ばれる(註2)。
$V={}^{N}V\cup{}^{T}V$とおき，Vの要素を記号と呼ぶ——対応して，V^*の要素を記号列と呼ぶ。

(2) Pは${}^{N}V^{+}\times V^{*}$の有限部分集合で，その要素は生成規則（production rule）と呼ばれる。

(3) Sは${}^{N}V$の要素で，生成の開始記号あるいは初期記号（initial symbol）と呼ばれる。

そして，Pをプロダクションとして Sから導かれる記号列で，終端記号のみでなるものを，($\mathcal{G}$による）文と呼ぶ。

文全体の集合は，帰納的集合である。

（註1） ここで定義する文生成システムは，"句構造文法（PSG, phrase structure grammar)"と同じものである。

（註2） "字彙（alphabet)"が，${}^{T}V$に対する解釈になる。

${}^{N}V$は，文生成に使用される補助記号の集合を意味する。

1.4 文生成システムの間の関係

1.4.1 文生成システムの同型

二つの文生成システム

$$\mathcal{G}_i=({}^{N}V_i,\ {}^{T}V_i,\ P_i,\ S_i),\quad (i=1,\ 2)$$

は，1対1対応

$$n:{}^{N}V_1\longrightarrow{}^{N}V_2$$
$$t:{}^{T}V_1\longrightarrow{}^{T}V_2,\qquad t(S_1)=S_2$$

で，1対1対応

$$P_1\rightarrow P_2$$

を導く(註)ものがとれるとき，同型であると言う。また，このときのnとtの対(n, t)を，$\mathcal{G}_1$の$\mathcal{G}_2$の上への同型と呼ぶ。

（註） 即ち，$V_i={}^{N}V_i\cup{}^{T}V_i$ $(i=1,\ 2)$に対し，$h:V_1\longrightarrow V_2$を

$$h|{}^{N}V_1=n$$
$$h|{}^{T}V_1=t$$

で定義し，さらに

$$h^*:V_1^*\setminus\{\varepsilon\}\longrightarrow V_2^*$$

を，

$$h^*(x_1x_2\cdots\cdots x_n)=h(x_1)h(x_2)\cdots\cdots h(x_n)$$
$$(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\in V_1)$$

で定義するとき，$(h^*\times h^*)|P_1$が，P_1とP_2の間の1対1対応になっていること。

1.4.2 文生成システムの強弱

二つの文生成システム$\mathcal{G}_1$，$\mathcal{G}_2$において，$\mathcal{G}_1$で生成される文が$\mathcal{G}_2$によっても生成されるとき，$\mathcal{G}_1$は$\mathcal{G}_2$よりも弱い（$\mathcal{G}_2$は$\mathcal{G}_1$よりも強い）と言い，$\mathcal{G}_1\leqq\mathcal{G}_2$で表わす。

このとき，"$\mathcal{G}_1\leqq\mathcal{G}_2$かつ$\mathcal{G}_2\leqq\mathcal{G}_1$"は文生成システムの間の同値関係になるが，これを$\mathcal{G}_1\sim\mathcal{G}_2$と表わす。

1.4.3 文生成システムの部分

二つの文生成システム$\mathcal{G}_i=({}^{N}V_i,\ {}^{T}V_i,\ P_i,\ S_i)$ $(i=1,\ 2)$において，

$${}^{N}V_1\subset{}^{N}V_2,\quad {}^{T}V_1\subset{}^{T}V_2,\quad P_1\subset P_2$$

が成り立っているとき，$\mathcal{G}_1$は$\mathcal{G}_2$の部分であると言う。

1.5 文生成システムの類型

プロダクションの形式によって文生成システムの類型を定義することが考えられる。文生成システムは句構造文法（PSG）と同じであるが，この句構造文法に関しては，以下のような類型化が伝統的になされている(註1)：

型	プロダクションの形	
0	$\varphi\alpha\psi\rightarrow\varphi\beta\psi$	$\alpha\in{}^{N}V,\ \beta\in V^*$ $\varphi,\ \psi\in{}^{N}V^*$

1	$\varphi\alpha\psi \rightarrow \varphi\beta\psi$	$\alpha \in {}^{N}V$, $\beta \in V^{+}$ φ, $\psi \in {}^{N}V^{*}$
2	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \in {}^{N}V$, $\beta \in V^{+}$
3	$\alpha \rightarrow \beta$か$\alpha \rightarrow \beta\gamma$	α, $\beta \in {}^{N}V$, $\beta \in {}^{T}V$

０，１，２，３型文法は，それぞれ句構造文法，文脈規定文法（context sensitive grammar），文脈自由文法（context free grammar），正規文法（regular grammar）(註２)とも呼ばれる。

０型文法，１型文法，２型文法，３型文法は，

(1)　ｎ型文法はｎ－１型文法

(2)　ｎ－１型文法でｎ型文法でないものが存在する

（ｎ＝1，2，3）

の関係にある。

（註１）　文法のこの類型化は，オートマトンの類型化と対応している。

例えば，有限状態オートマトン（FA）の働きが３型文法で記述でき，またプッシュダウン・オートマトン（PDA）の働きが２型文法で記述できる。ここで，“働きが文法で記述できる”とは，働きが〈文法処理〉として記述できるということである。

（註２）　正規表現であることと３型文法によって生成されることとが同値であることによる。

1.6　文生成システムの例

1.6.1　自然数のｎ進生成(註)

自然数のｎ進生成（“ｎ進記数法”）は，文生成システムとして定式化できる。

例えばｎ＝２の場合，

(1)　２型PSGへの定式化：

$^{N}V = \{$〈数〉，〈数字〉，〈字〉$\}$

$^{T}V = \{0,\ 1\}$

P：

〈数〉　→　〈数字〉，

〈数〉　→　〈数〉〈字〉

〈字〉　→　〈数字〉

〈字〉　→　0

〈数字〉　→　1

S＝　〈数〉

なお，これのBNF（Buckus normal form）は，つぎのようになる：

〈数〉　：：＝〈数字〉

　　　　｜　〈数〉〈字〉

〈字〉　：：＝〈数字〉

　　　　｜　0

〈数字〉：：＝1

(2)　３型PSGへの定式化：

$^{N}V = \{$〈数〉，〈字列〉$\}$

$^{T}V = \{0,\ 1\}$

P：

〈数〉　→　1

〈数〉　→　1　〈字列〉

〈字列〉　→　1

〈字列〉　→　0

〈字列〉　→　1　〈字列〉

〈字列〉　→　0　〈字列〉

S＝　〈数〉

（註）　cf. 水谷静夫，“言語と数学”（数学ライブラリー〈教養篇〉５），森北出版，1970，p.39，p.43.

1.6.2　１と一文字変数を原始項とする算術式

1.6.2.1　逆ポーランド記法算術式言語

“逆ポーランド記法算術式言語（RPA）”は，文生成システム（^{N}V，^{T}V，P，S）としてつぎのように定式化できる。

(1)　$^{N}V = \{A,\ T,\ U,\ B,\ R,\ S\}$

$^{T}V = \overline{A} \cup \overline{U} \cup \overline{B} \cup \overline{R}$

ここで

$\overline{A} = \{a,\ b,\ c,\ \cdots\cdots,\ z,\ 1\}$

$\overline{U} = \{\ ',\ !,\ \sim\}$(註１)

$\overline{B} = \{+,\ -,\ \times,\ \div,\ \hat{}\ \}$(註２)

$\overline{R} = \{=,\ <,\ >\}$

(2)　P：

$S \rightarrow TTR$

$T \rightarrow TU$

$T \rightarrow TTB$

$T \rightarrow A$

$A \rightarrow \varphi$　$(\varphi \in \overline{A})$

$U \rightarrow \varphi$　$(\varphi \in \overline{U})$

$B \to \varphi \quad (\varphi \in \overline{B})$

$R \to \varphi \quad (\varphi \in \overline{R})$

S，A，T，U，B，Rの読みは，それぞれ“式(Sentence)”，“原始項(Atomic-term)”，“項(Term)”，“単項関数(Uni-term-function)”，“二項関数(Binary-term-function)”，“二項関係(binary-term-Relation)”である。A，U，B，Rに$\overline{}$がついたものは，それぞれA，U，B，Rの読みで使われる記号の集合である。

規則S→TTRは，式を生成するためのものである[註3]。

規則T→TU，T→TTB，T→Aは，項を生成するためのものである[註4]。

規則$\{A \to \varphi \mid \varphi \in \overline{A}\}$は，数項（原始項）を定めるためのものである[註5]。

なお，プロダクションのBNFによる表現は，つぎのようになる：

〈式〉　：：＝〈項〉〈項〉〈二項関係〉
〈項〉　：：＝〈原子項〉
　　　　｜〈項〉〈単項関数〉
　　　　｜〈項〉〈項〉〈二項関数〉
〈原子項〉　：：＝〈文字〉
〈文字〉　：：＝a｜b｜c｜d｜e｜f
　　　　｜g｜h｜i｜j｜k｜l
　　　　｜m｜n｜o｜p｜q｜r
　　　　｜s｜t｜u｜v｜w｜x
　　　　｜y｜z｜1
〈単項関数〉：：＝ ′｜！｜～
〈二項関数〉：：＝ ＋｜－｜×｜÷｜＾
〈二項関係〉：：＝ ＝｜<｜>

（註1）′は“後者”を対応させる関数。！は階乗，そして～はマイナス記号（減算の－と区別するためにこのように表わしておく）。

（註2）＾は，巾乗の記号。

（註3）意味するところは，

(1) 項φ，ψと二項関係Rに対する$\varphi\psi R$は式；

(2) 上の規則によって生成される記号列のみが式。

（註3）意味するところは，

(1) 原子項は項；

(2) 項φと単項関数fに対するφfは項；

(3) 項φ，ψと二項関数fに対する$\varphi\psi f$は項；

(4) 上の(1)-(3)によって生成される記号列のみが項。

（註3）意味するところは，

(1) a，b，……，z，1は原子項；

(2) これのみが原子項。

1.6.2.2 通例の算術式の生成システム

通例の算術式の生成は，つぎのように定式化される――但し，BFNの形式で示す：

〈関係式〉
　：：＝〈開対象式〉〈関係記号〉〈開対象式〉
〈開対象式〉
　：：＝〈開項〉
　　｜〈閉対象式〉
　　｜〈開対象式〉〈加減記号〉〈閉対象式〉
　　｜〈対称化記号〉(〈開対象式〉)
　　｜(〈開対象式〉)′
　　｜(〈開対象式〉)！
〈閉対象式〉
　：：＝〈閉項〉
　　｜〈閉対象式〉〈加減関数〉〈閉対象式〉
　　｜(〈対称化記号〉〈閉対象式〉)
　　｜(〈閉対象式〉)′
　　｜(〈閉対象式〉)！
〈開項〉
　：：＝〈開因子〉
　　｜〈閉項〉
　　｜〈開項〉〈乗除関数〉〈閉項〉
　　｜〈対称化記号〉(〈開項〉)
　　｜(〈開項〉)′
　　｜(〈開項〉)！
〈閉項〉
　：：＝〈閉因子〉
　　｜〈閉項〉〈乗除関数〉〈閉項〉
　　｜(〈対称化記号〉〈閉項〉)
　　｜(〈閉項〉)′
　　｜(〈閉項〉)！
　　｜(〈閉項〉) ＾ (〈閉項〉)
　　｜〈閉因子〉 ＾ (〈閉項〉)
　　｜(〈閉項〉) ＾ 〈閉因子〉
〈開因子〉
　：：＝〈閉因子〉
　　｜〈対称化記号〉〈閉因子〉

〈閉因子〉
：：＝〈文字〉
｜(〈対称化記号〉〈閉因子〉)
｜(〈閉因子〉′)
｜(〈閉因子〉！)
｜(〈閉因子〉 ^ 〈閉因子〉)
〈文字〉
：：＝a｜b｜c｜d｜e｜f｜g｜h｜i
｜j｜k｜l｜m｜n｜o｜p｜q｜r
｜s｜t｜u｜v｜w｜x｜y｜z｜1
〈対称化記号〉
：：＝ －
〈加減記号〉
：：＝ ＋｜－
〈乗除記号〉
：：＝ ×｜÷
〈関係記号〉
：：＝ ＝｜＜｜＞

RPAにくらべて文法が複雑になるのは，演算子 ′，！，＋，－，×，÷，^ に関する“結合の強さ”の考え(註)を取り入れていることと，対称化記号と減算記号を兼用していることによる。

(註)　例えば，
－(a^b) の意味で，－a^bを許す；
a^ (－b) の意味で，a^－bを許す；
a^ (b^c) の意味で，a^b^cを許す；
(－a) ＋bの意味で，－a＋bを許す；
しかしまた，
＋，－，×，÷の直後に－がくる記号列は許さない；
等々。

1.6.3　二進数の加算式

二進数（零を含める）の加算式は，文生成システム (^{N}V，^{T}V，P，S) の生成する文として，つぎのように定式化できる。

(1)　^{N}V：
S：開始記号（可算式生成に関する）
N：二進数生成に関する
STR：数記号列（空列を含む）生成に関する

(2)　^{T}V＝{1，0，＋}

(2)　P：
S → S＋N
S → N
N → 0
N → 1STR
STR → STR0
STR → STR1
STR → ε

プロダクションをBFNで書けば，つぎのようになる：

(1)　〈加算式〉　：：＝〈可算式〉＋〈数〉
｜〈数〉
(2)　〈数〉　：：＝ 0
｜1〈数記号列〉
(3)　〈数記号列〉：：＝〈数記号列〉0
｜〈数記号列〉1
｜ε

2　文の変形

2.1　文変形システム

文――即ち，文生成システムが生成する記号列――に対しては，さらに，それの変形を主題化できる。

われわれは，文の“変形”を，(シェマを援用する)“文変形システム”の枠組みの下で定義する。即ち，

(代入規則に従う導出)
文$_1$ ←―――― シェマ$_1$
┆　　　　　　｜(変形規則に従う導出)
↓　　　　　　↓
文$_2$ ――――→ シェマ$_2$

の図式で，文の変形を定義する。

実際，無限に生成される文に対してそれらの許される変形を実効的手続きによって――特に，有限個の規則をもって――すべて規定する方法は，このようなものである他ない。

本節ではこの“文変形”の定式化を述べるが，

われわれは“文変形”の形式的定義をはじめに示すということはせずに，意味を十分喚起した後に形式的定義を示すという方法をとることにする。というのも，形式的定義は，非常に煩瑣で見通しの悪いものになるからである。

2.2 “シェマ変形規則に従う文変形”の概要

“シェマ変形規則に従う文変形”は，つぎのようになる：

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\text{代入}) & \\
\text{文}_1 & \longleftarrow & \text{文}_1\text{のシェマ}_1 \\
 & & \downarrow\ (\text{変形}) \\
\text{記号列}_1 & \longleftarrow & \text{記号列}_1\text{のシェマ}_1 \\
\| & & \\
\text{記号列}_1 & \longleftarrow & \text{記号列}_1\text{のシェマ}_2 \\
 & & \downarrow \\
\text{記号列}_2 & \longleftarrow & \text{記号列}_2\text{のシェマ}_1 \\
\| & & \\
\text{記号列}_2 & = & \text{記号列}_2\text{のシェマ}_2 \\
 & & \downarrow \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & & \downarrow \\
\text{記号列}_n & \longleftarrow & \text{記号列}_n\text{のシェマ}_1 \\
\| & & \\
\text{記号列}_n & \longleftarrow & \text{記号列}_n\text{のシェマ}_2 \\
 & & \downarrow \\
\text{文}_2 & \longleftarrow & \text{文}_2\text{のシェマ}_1
\end{array}
$$

ここで，〈記号列$_i$〉は変形作業上（“計算上”）の記号列で，文をそれの特殊とする。対応して，〈記号列$_i$のシェマ$_j$〉は，変形作業上（“計算上”）のシェマで，〈文のシェマ〉をそれの特殊とする。

また，

$$
\begin{array}{ccc}
\text{記号列}_i & \longleftarrow & \text{記号列}_i\text{のシェマ}_1 \\
\| & & \\
\text{記号列}_i & \longleftarrow & \text{記号列}_i\text{のシェマ}_2
\end{array}
$$

は，記号列$_i$に対する解釈の変更である。

2.3 シェマシステム

2.3.1 シェマシステム

文のシェマは，文生成システム$\mathcal{G}$に対するもう一つの文生成システム$\overline{\mathcal{G}}$が生成する文と解される。

しかし，$\overline{\mathcal{G}}$自身は，それの生成する文を$\mathcal{G}$の文のシェマと身分づけるものにはなり得ない。“$\mathcal{G}$の文のシェマを生成するシステム”――簡単に，“$\mathcal{G}$の上のシェマシステム”――は，$\overline{\mathcal{G}}$のほかに，シェマから文を導く“代入”を実現する装置を備えているものでなければならない。

われわれは，文変形

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\text{代入}) & \downarrow \\
\text{記号列}_i & \longleftarrow & \text{記号列}_i\text{のシェマ}_1 \\
\| & & \\
\text{記号列}_i & \longleftarrow & \text{記号列}_i\text{のシェマ}_2 \\
 & & \downarrow \\
\text{記号列}_{i+1} & \longleftarrow & \text{記号列}_{i+1}\text{のシェマ}_1 \\
\| & &
\end{array}
$$

をつぎのように考えることにする：

(1) 記号列$_i$とこれのシェマは，変形作業上の記号（変形補助記号）を共有する――記号列$_i$は$\mathcal{G}$の終端記号と変形補助記号で成り，これのシェマは$\overline{\mathcal{G}}$の非終端記号と変形記号で成る。

(2) “代入”は，$\overline{\mathcal{G}}$の<u>終端</u>記号の列に対する$\mathcal{G}$の<u>終端</u>記号の列の〈代入〉である。

ここで〈代入〉は，“記号列の直接代入”に限定されない。実際，“代入”が有限個の代入規則で述べられるためには，“代入”はより拡張された形で定式化されていなければならない（Cf.§6.3.4）。

“代入”のこの定式化をつぎに述べる。

2.3.2 “代入”の定式化

われわれは，“代入”を

《代入枠に対する一定の規則の適用》

というように，定式化する――この規則を“代入規則”と呼ぶ。“記号列の直接代入”は，これの特殊になる。いま，

$\mathcal{G}=({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ S)$,

$\overline{\mathcal{G}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{S})$

とする。

“代入枠”は，${}^{N}\overline{V}$ の部分で定義され${}^{N}V$ に値をもつ関数各々に対して考えられる——このように身分づけられた関数を，シェマ関数と呼ぶことにする。

即ち，${}^{N}\overline{V}$ の部分で定義され${}^{N}V$ に値をもつ関数σに対し，つぎの条件を満たす

$\{(\overline{x}_1, x_1), \cdots\cdots, (\overline{x}_n, x_n)\} \subset {}^{T}\overline{V}^* \times {}^{T}V^*$

（$\overline{x}_i$は互いに異なる）

は，σをシェマ関数とする代入枠であると言う：

各$i=1, \cdots\cdots, n$に対し，

$\overline{X}_i \in {}^{N}\overline{V}$, $X_i \in {}^{N}V$

で，

$$\begin{array}{c} \overline{X}_i \overset{*}{\underset{\overline{P}}{\Rightarrow}} \overline{x}_i \\ \sigma \Big\downarrow \\ X_i \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} x_i \end{array}$$

を満たすものが存在する。

そして，“（シェマ関数σに関する）代入規則”とは，各代入枠$\{(\overline{x}_1, x_1), \cdots\cdots(\overline{x}_n, x_n)\}$に対して代入の方法を一つ定める規則のことである。——それは，記号列：

$\overline{\varphi} = U_1\eta_1U_2\eta_2\cdots\cdots U_p\eta_pU_{p+1}$

で，条件：

(1)　η_j全体は，$\overline{x}_i$全体と一致する

(2)　各U_jの中に${}^{T}\overline{V} \setminus {}^{T}V$ の要素は現われない

を満たすものに対する代入規則であるが，$\overline{x}_i$に対するx_iの直接代入とは限らない。

2.3.3　シェマ

記号列$\overline{\varphi}$，φが，

《代入規則に従う代入によって，$\overline{\varphi}$からφが導かれる》

という関係にあるとき，$\overline{\varphi}$はφのシェマであると言う。

2.3.4　“記号列の直接代入”

ここで念のために，“記号列の直接代入”の定義を示しておく。

即ち，記号列φ，ψ，ξ_i，α_i $(i=1, \cdots\cdots, n)$——ξ_iは互いに異なる——に対し，

《直接代入$\{\xi_1 \to \alpha_1, \cdots\cdots, \xi_n \to \alpha_n\}$によって，$\varphi$から$\psi$が導かれる》

とは，つぎの条件を満たす記号列

η_j，β_j $(j=1, \cdots\cdots, p)$

U_j $(j=1, \cdots\cdots, p+1)$

がとれることである：

(1)　$\varphi = U_1\eta_1U_2\eta_2\cdots\cdots U_p\eta_pU_{p+1}$

$\psi = U_1\beta_1U_2\beta_2\cdots\cdots U_p\beta_pU_{p+1}$

(2)　η_j全体は，ξ_i全体と一致する

(3)　各U_jにξ_i $(i=1, \cdots\cdot, n)$は現われない

(4)　$\eta_j=\xi_i$ならば$\beta_j=\alpha_i$

2.3.5　原初的代入規則

つぎの形の代入規則を，“原初的”と称することにする：

《記号列$\overline{\varphi}$と，$\overline{\varphi}$の代入枠

$r=\{(\xi_1, \alpha_1), \cdots\cdots, (\xi_n, \alpha_n)\}$

に対し，$\overline{\varphi}$のrによる代入は，代入

$\{\xi_1 \to \alpha_1, \cdots\cdots, \xi_n \to \alpha_n\}$》

2.3.6　シェマシステムの定義

以上の準備の下に，シェマシステムを以下のように定義する。

即ち，文生成システム$\mathcal{G}=({}^{N}V, {}^{T}V, P, S)$の上のシェマシステムとは，つぎのようなシステム

$$\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{G}}, \sigma, \mathcal{R})$$

のことである：

(1)　$\overline{\mathcal{G}}$は，“シェマ生成システム”と解釈される文生成システム

$({}^{N}\overline{V}, {}^{T}\overline{V}, \overline{P}, \overline{S})$ (註)

で，$V={}^{N}V \cup {}^{T}V$, $\overline{V}={}^{N}\overline{V} \cup {}^{T}\overline{V}$ とおくとき，

$\overline{V} \cap V = {}^{T}\overline{V} \cap {}^{T}V = {}^{T}V$

(2)　σは，シェマ関数と呼ばれる，${}^{N}\overline{V}$ の部分で定義され${}^{N}V$ に値をもつ関数。

(3)　$\mathcal{R}$は，シェマ代入規則。

（註）${}^{T}\overline{V}$は，シェマの記述で使用している記号を明示したものである。

2.4 文変形システム

2.4.1 文変形システム

文生成システム$\mathscr{G}=({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ S)$に対し，$\mathscr{G}$が生成する文の変形を定義するシステム——"$\mathscr{G}$の上の文変形システム"——を，つぎのようなシステム

$$(\mathscr{H},\ (\mathscr{S},\ \mathscr{D}))$$

として定義する：

(1) $\mathscr{H}$は，$\mathscr{G}$の拡張でかつ$\mathscr{G}$と同値である文生成システム。

(2) $\mathscr{S}$は，$\mathscr{H}$の上のシェマシステム（$\overline{\mathscr{H}}$，σ，$\mathscr{R}$）。

$\overline{\mathscr{H}}$の終端記号の集合を${}^{T}\overline{V}$とする。

(3) $\mathscr{D}=(V_D,\ D)$　で，

(3-1) V_Dは，${}^{T}\overline{V}$と交わらない有限集合で，要素が"変形補助記号"と呼ばれる。

(3-2) Dは，$({}^{T}\overline{V}\cup V_D)^{*}\times({}^{T}\overline{V}\cup V_D)^{*}$の部分集合で，要素が"変形規則"と呼ばれる。

2.4.2 変形

記号列α，$\beta\in({}^{T}V\cup V_D)^{*}$において，つぎの（$*$），(#)のいずれかが成り立つことを，

$$\alpha \underset{D}{\rightarrow} \beta$$

で表わし，"αはβに直接変形可能である"と読む：

(#) Dの一つの要素をプロダクションとして，αからβが直接導かれる：

$$\alpha \underset{D}{\Rightarrow} \beta$$

（$*$）記号列φ，$\psi\in({}^{T}\overline{V}\cup V_D)^{*}$で条件：

(1-1) Dの一つの要素をプロダクションとして，φからψが直接導かれる：

$$\varphi \underset{D}{\Rightarrow} \psi$$

(1-2) α，βは，同一の代入枠の上で，それぞれφ，ψから代入で導かれる

を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
\alpha & \varphi \arrow[l, "\text{同一の代入枠の下の代入}"'] \arrow[d, "D"] \\
\beta & \psi \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

そして，$\mathscr{G}$の文α，βに対し，記号列

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n\in({}^{T}V\cup V_D)^{*}$$

が存在して

$$\alpha \underset{D}{\rightarrow} \alpha_1,\ \alpha_1 \underset{D}{\rightarrow} \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_{n-1} \underset{D}{\rightarrow} \alpha_n=\beta$$

となるとき，βはαを変形して得られると言い，

$$\alpha \overset{*}{\underset{D}{\rightarrow}} \beta$$

と表わす。

2.4.3 計算

変形に対する一つの読みが"計算"である。実際，"計算"は，プロダクションによって記号列を別の記号列に変形する過程(註1)と見なされる。そしてこのように見ることで，"計算という概念が，[記号]処理という概念に結びつく"(註2)。

文αの文βへの変形が"計算"と読まれるとき，βはαに対する計算結果であると言う。

（註1）　"このような過程を生成するには，適用すべき幾つかの規則を書き連ねる必要があるであろう。この規則の並びも，実効的手続きであると考えられるのである。"［福村晃夫，『アルゴリズム理論入門(コンピュータ基礎講座2)』，昭晃堂，1977.p.56］

（註2）　［ibid.，p.57］

2.5 文生成変形システム

文生成システム$\mathscr{G}$と，$\mathscr{G}$の上の文変形システム（$\mathscr{H}$，（$\mathscr{S}$，$\mathscr{D}$））がつくる組

$$(\mathscr{G},\ \mathscr{H},\ (\mathscr{S},\ \mathscr{D})\}$$

を，文生成変形システムと呼ぶ。

2.6 文生成変形システムの例——二進数の加算

2.6.1 変形としての加算

二進数の加算式は，一つの文生成システム$\mathcal{G}$の生成するものと見なせた（§1.6.3）。即ち，

（I）　$\mathcal{G}$＝（^{N}V, ^{T}V, P, S）において，

(1) ^{N}V　：

S　：開始記号（可算式生成に関する）

N　：二進数生成に関する

STR ：数記号列（空列を含む）生成に関する

(2) $^{T}V=\{1,\ 0, +\}$

(3) P：

$S\to S+N$

$S\to N$

$N\to 0$

$N\to 1STR$

$STR\to STR0$

$STR\to STR1$

$STR\to \varepsilon$

さらに，加算を，$\mathcal{G}$の上の変形と見なすことができる。即ち，加算を伴う二進数加算式の系が，$\mathcal{G}$上の文変形システム（$\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$）によって実現できる。

（II）　$\mathcal{G}$の拡張でかつ$\mathcal{G}$と同値な文生成システム$\mathcal{H}$を，つぎのように定義する：

(1-1) ^{N}Vに，

U：長さ1の数記号列生成に関する

を追加する。

(1-2) Pに，

$U\to 0$

$U\to 1$

を追加する。

(III)　$\mathcal{H}$の上のシェマシステム$\mathcal{S}$＝（$\overline{\mathcal{H}}$, σ, $\mathcal{R}$）を，つぎのように定義する：

(2) $\overline{\mathcal{H}}$＝（$^{N}\overline{V}$, $^{T}\overline{V}$, $\overline{P}$, $\overline{S}$）は，

(2-1) $^{N}\overline{V}=\{\overline{S},\ \overline{N},\ \overline{STR},\ \overline{U}\}$

(2-2) $^{T}\overline{V}=\{1,\ 0,\ +,\ m,\ n,\ s,\ t\}$

(2-3) $\overline{P}$：

$\overline{S}\to\overline{S}+\overline{N}$

$\overline{S}\to\overline{N}$

$\overline{N}\to 0$

$\overline{N}\to 1\overline{STR}$

$\overline{STR}\to\overline{STR}0$

$\overline{STR}\to\overline{STR}1$

$\overline{STR}\to\varepsilon$

$\overline{U}\to 0$

$\overline{U}\to 1$

$\overline{STR}\to s$

$\overline{STR}\to t$

$\overline{U}\to m$

$\overline{U}\to n$

(3) シェマ関数σは，

$\overline{S}\to S$

$\overline{N}\to N$

$\overline{STR}\to STR$

$\overline{U}\to U$

(4) 代入規則は，原初的代入規則。

(III)　$\mathcal{D}$＝（V_D, D）は，つぎのように定義する：

(1) $V_D=\{\$,\ \#,\ {}^1\}$

(2) D(註1)：

(a1)　$/s+t/\to/\$s+t\$/$

(a2)　$/s+t+\to/\$s+t\$+$

(b1)　$\$sm+tn\$\to\$s+t\#m+n\#\$$

(b2)　$\$sm+tn\#\to\$s+t\#m+n\#$

(c1)　$\#0+n\#\to\#n$

(c2)　$\#1+0\#\to\#1$

(c3)　$\#1+1\#\to{}^1\#0$

(d1)　$+{}^1\to+1$

(d2)　$0\,{}^1\to 1$

(d3)　$1\,{}^1\to{}^1\,0$

(e1)　$\$s+\#\to\$s$

(e2)　$\$+s\#\to\$s$

(e3)　$\$+\#\to\$$

(f)　$\$s\$\to s$

ここで，“/”は，式の端を示すメタ記号である（変形補助記号ではない）。

なお，計算が実際に所期の結果に到達できるためには，この変形規則が与えられているだけでは，十分でない――規則適用順まで一意的に決める必要がある(註2)。

（註1）〔水谷静夫，“言語と数学”，森北出版，1970,

pp.67-72］から記号を変えて，引用。

'$'，'#'，'^1'の意味は，つぎのようになる：

(1) '$'で，一単位の加算を画定する；

(2) '#'で，一単位の加算から同じ桁の数同士の＋を分離する；

(3) '1'で，位上がりがあることを指示する。

そこで，

(a1)，(a2) は，一単位の加算を画定する規則；

(b1)，(b2) は，着目する桁の分離の規則；

(c1) - (c3) は，加算“九九”の表の規則；

(d1) - (d3) は，位上がりの規則；

(e1) - (e3) は，一単位の加算の終了条件の規則

(f) は，計算結果の収束の規則

である。

（註2）　［ibid.，pp.70，71］。

2.6.2 変形の例

式の変形（“計算”）の例として，

$$10+11+1 \overset{*}{\Rightarrow} 110$$

を示す(註)：

```
                         (代入)
/10+11+1/            ←—/s+t+1/
                          ↓ (a2)
/$10+11$+1/          ←—/$s+t$+1/
      ||
/$10+11$+1/          ←—/$sm+tn$+1/
                          ↓ (b1)
/$1+1#0+1#$+1/       ←—/$s+t#m+n#$+1/
      ||
/$1+1#0+1#$+1/       ==/$1+1#0+n#$+1/
                          ↓ (c1)
/$1+1#1$+1/          ==/$1+1#n$+1/
      ||
/$1+1#1$+1/          ←—/$sm+tn#1$+1/
                          ↓ (b2)
/$ +#1+1#1$+1/       ←—/$s+t#m+n#1$+1/
      ||
/$ +#1+1#1$+1/       ==/$+#1+1#1$+1/
                          ↓ (c3)
/$+^1#01$+1/         ==/$+^1#01$+1/
      ||
/$+^1#01$+1/         ==/$+^1#01$+1/
                          ↓ (d1)
/$+1#01$+1/          ==/$+1#01$+1/
      ||
/$+1#01$+1/          ←—/$+s#01$+1/
                          ↓ (e2)
/$101$+1/            ←—/$s01$+1/
      ||
/$101$+1/            ←—/$s$+1/
                          ↓ (f)
/101+1/              ←—/s+1/
      ||
/101+1/              ←—/s+t/
                          ↓ (a1)
/$101+1$/            ←—/$s+t$/
      ||
/$101+1$/            ←—/$sm+tn$/
                          ↓ (b1)
/$10+#1+1#$/         ←—/$s+t#m+n#$/
      ||
/$10+#1+1#$/         ==/$10+#1+1#$/
                          ↓ (c3)
/$10+^1#0$/          ==/$10+^1#0$/
      ||
/$10+^1#0$/          ==/$10+^1#0$/
                          ↓ (d1)
/$10+1#0$/           ==/$10+1#0$/
      ||
/$10+1#0$/           ←—/$sm+tn#0$/
                          ↓ (b2)
/$1+#0+1#0$/         ←—/$s+t#m+n#0$/
      ||
/$1+#0+1#0$/         ←—/$1+#0+n#0$/
                          ↓ (c1)
/$1+#10$/            ←—/$1+#n0$/
      ||
/$1+#10$/            ←—/$s+#10$/
                          ↓ (e1)
/$110$/              ←—/$s10s/
      ||
/$110$/              ←—/$s$/
                          ↓ (f)
/101/                ←—/s/
```

（註）　[ibid., p.71]

2.7　文生成変形システムの間の関係

2.7.1　文生成変形システムの同型

二つの文生成変形システム

$\mathcal{T}i=(\mathcal{G}_i,\ \mathcal{G}_i,\ (\mathcal{S}_i,\ \mathcal{D}_i))$（註１）

$(i=1,\ 2)$

が同型であることを，以下の条件を満たすことと定義する。

即ち，

$\mathcal{G}_i=({}^N V_i,\ {}^T V_i,\ P_i,\ S_i)$,

$\mathcal{S}_i=(\overline{\mathcal{G}}_i,\ \sigma_i,\ \mathcal{R}_i)$,

$\overline{\mathcal{G}}i=({}^N\overline{V}_i,\ {}^T\overline{V}_i,\ \overline{P}_i,\ \overline{S}_i)$,

$\mathcal{D}_i=(V_{Di},\ P_{Di})$

$(i=1,\ 2)$

とするとき，

(1)　$\mathcal{G}_1$と$\mathcal{G}_2$の間の（文生成システムの）同型 $f=(f_N,\ f_T)$

(2)　$\overline{\mathcal{G}}_1$と$\overline{\mathcal{G}}_2$の間の（文生成システムの）同型 $\overline{f}=(\overline{f}_N,\ \overline{f}_T)$

(3)　１対１対応

$$d : V_{D1}\longrightarrow V_{D2}$$

で，つぎの条件を満たすものがとれる：

(1)　f は，$\mathcal{G}_1$と$\mathcal{G}_2$の間の同型を導く。

(2)　つぎの二つの図式はともに可換：

$$\begin{array}{ccc} {}^N V_1 & \xrightarrow{f_N} & {}^N V_2 \\ \uparrow\sigma_1 & & \uparrow\sigma_2 \\ {}^N\overline{V}_1 & \xrightarrow{\overline{f}_N} & {}^N\overline{V}_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} {}^T V_1 & \xrightarrow{f_T} & {}^T V_2 \\ \cap & & \cap \\ {}^T\overline{V}_1 & \xrightarrow{\overline{f}_T} & {}^T\overline{V}_2 \end{array}$$

(3)　f_Nと$\overline{f}_N$は，代入規則の間の１対１対応を導く；

(4)　f と d は，１対１対応

$$P_{D1}\longrightarrow P_{D2}$$

を導く（註２）

また，このときの f, $\overline{f}$, d の組 $(f,\ \overline{f},\ d)$ を，$\mathcal{T}_1$の$\mathcal{T}_2$の上への同型と呼ぶ。

（註１）　文生成変形システム（$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$,（$\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$））において，$\mathcal{G}$と$\mathcal{H}$は同値な文生成システムなので，$\mathcal{G}$は最初から$\mathcal{H}$としてとられていると考えてよい。したがって，$\mathcal{G}=\mathcal{H}$として一般性を失わない。

（註２）　即ち，$M_i={}^T V_i\cup V_{Di}\ (i=1,\ 2)$ に対し，M_1のM_2の上への１対１対応 h が，

$$h\mid {}^T V_1=f_T$$
$$h\mid {}^T\overline{V}_1=\overline{f}_T$$
$$h\mid V_{D1}=d$$

で定義され，さらに

$$h^* : M_1^*\setminus\{\varepsilon\}\longrightarrow M_2^*$$

が，つぎのように定義される：

$$h^*(x_1x_2\cdots\cdots x_n)=h(x_1)h(x_2)\cdots\cdots h(x_n)$$

$(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\in M_1)$

このとき，$h^*\mid P_{D1}$がP_{D1}とP_{D2}の間の１対１対応になっていること。

2.7.2　文生成変形システムの強弱

二つの文生成変形システム $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$において，$\mathcal{T}_1$で生成される文が$\mathcal{T}_2$でも生成され，$\mathcal{T}_1$での文変形が$\mathcal{T}_2$でも実現されるとき，$\mathcal{T}_1$は$\mathcal{T}_2$よりも弱い（$\mathcal{T}_2$は$\mathcal{T}_1$よりも強い）と言い，$\mathcal{T}_1\leqq\mathcal{T}_2$で表わす。

このとき，“$\mathcal{T}_1\leqq\mathcal{T}_2$かつ$\mathcal{T}_2\leqq\mathcal{T}_1$”は，文生成変形システムの間の同値関係になるが，これを$\mathcal{T}_1\sim\mathcal{T}_2$と表わす。

2.7.3　文生成変形システムの部分

二つの文生成変形システム

$\mathcal{T}_i=(\mathcal{G}_i,\ \mathcal{G}_i,\ (\mathcal{S}_i,\ \mathcal{D}_i))$

$\mathcal{S}_i=(\overline{\mathcal{G}}_i,\ \sigma_i,\ \mathcal{R}_i)$,

$\mathcal{D}_i=(V_{Di},\ P_{Di})$,　　　$(i=1,\ 2)$

において，

(1)　文生成システム$\mathcal{G}_1$, $\overline{\mathcal{G}}_1$は，それぞれ文生成システム$\mathcal{G}_2$, $\overline{\mathcal{G}}_2$ の部分。

(2)　σ_1, $\mathcal{R}_1$は，それぞれσ_2, $\mathcal{R}_2$の制限。

(3)　$V_{D1}\subset V_{D2}$, $P_{D1}\subset P_{D2}$。

が成り立っているとき，$\mathcal{T}_1$は$\mathcal{T}_2$の部分である

と言う。

3　理論

3.1　“理論”の意味

3.1.1　“理論”

われわれは“理論”を，“定理”と呼ばれる特権化された文を生成するシステムとして捉える。

理論 $\mathcal{T}$は，文生成システム(“文法”) $\mathcal{G}$が生成する文の或るものを“定理”として特権化する。理論 $\mathcal{T}$に対しこのような関係にある文生成システム $\mathcal{G}$を，われわれは，“ $\mathcal{T}$の土台となる文生成システム”と呼ぶことにする。

3.1.2　推論，テクスト，定理，証明

定理の生成は，“推論”として捉えられる。

“推論”は，

《文の組からの，一つの文の導出》

という形で定式化され，“仮定からの結論の導出”と読まれる。

“推論”は，現象的には，《既につくられている文の列に新しく文を付け加える》という形でなされる〈文の列の生成〉である。この文の列を，理論 $\mathcal{T}$で生成されるテクストと呼び，列の項になる文を，テクストの句と呼ぶことにする。

定理の生成は，“公理”という名で特権化された文の集合を“仮定”にとったときの，“仮定からの結論の導出”である[註]。

一つの定理τの導出において生成されるテクストは，τの証明と呼ぶ。定理の証明は，定理の（有限）列である。

文φの証明が存在すること（即ち，φが定理であること）を，φは証明可能 (provable) であると言い表わす。

（註）　但しわれわれは，“公理”を

《ε（空記号列）の変形規則》

と捉え直して，“変形システム”の中に解消する（§3.2.3)。

3.1.3　テクスト変形としての“推論”

テクスト生成を現象とする“推論”は，テクスト更新の過程と見なすことができ，さらに，テクスト変形の過程と見なすことができる。実際，われわれは“推論”をテクストの変形として定式化する。

3.2　理論の定義

3.2.1　テクスト生成システム

文生成システム

$$\mathcal{G} = ({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ SEN^{(註1)})$$

に対し，“ $\mathcal{G}$の上のテクスト生成システム”と呼ばれる文生成システム

$$\mathcal{G}^{\#} = ({}^{N}V^{\#},\ {}^{T}V^{\#},\ P^{\#},\ TXT^{(註2)})$$

を，つぎのように定義する[註3]：

(1)　${}^{N}V^{\#} = {}^{N}V \cup \{TXT\}$

(2)　${}^{T}V^{\#} = {}^{T}V \cup \{txt,\ {}_{1},\ \hat{\ }\}$

(3)　$P^{\#}$は，Pに

$$TXT \to TXT\ \hat{}SEN$$
$$TXT \to SEN$$
$$TXT \to TXT_{1}$$
$$TXT \to txt$$

を追加したもの。

$\mathcal{G}^{\#}$から生成される文は，$\mathcal{G}$の文を記号 $\hat{\ }$で連結した形をしている。$\mathcal{G}^{\#}$の文を $\mathcal{G}$の上のテクストと呼ぶ。また，$\hat{\ }$で連結されている各文を，テクストの句と呼ぶ。

（註1）　‘SEN’は，‘SENtence’。

（註2）　‘TXT’は，‘TeXT’。

（註3）　$\mathcal{G}^{\#}$は$\mathcal{G}$によって決定するので，以下，理論の記述においてはそれの明示を適宜省略する。

3.2.2　文生成変形システムからのテクスト生成変形システムの標準的導出

文生成変形システム

$$(\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \mathcal{U}),\quad \mathcal{U} = (\mathcal{S},\ \mathcal{D})$$
$$\mathcal{S} = (\overline{\mathcal{H}},\ \sigma,\ \mathcal{R}),\quad \mathcal{D} = (V_{D},\ D)$$

(§2.5) から，テクスト生成変形システム

$$(\mathcal{G}^{\#},\ \mathcal{H}^{\#},\ \mathcal{U}^{\#}),\quad \mathcal{U}^{\#} = (\mathcal{S}^{\#},\ \mathcal{D}^{\#})$$
$$\mathcal{S}^{\#} = (\overline{\mathcal{H}^{\#}},\ \sigma^{\#},\ \mathcal{R}),\quad \mathcal{D}^{\#} = (V_{D},\ D^{\#})$$

をつぎのように導く。

(1)　シェマ関数$\sigma^{\#}$は，

$$\sigma^{\#}(\overline{\mathrm{TXT}}) = \mathrm{TXT}$$

とおいてσを拡張したもの。ここで，TXT，$\overline{\mathrm{TXT}}$は，それぞれ$\mathcal{H}^{\#}$，$\overline{\mathcal{H}}^{\#}$の開始記号。

(2)　$D^{\#}$は，集合

$$\begin{aligned}
\{\ &/\alpha\varphi\beta/ \\
&\quad\to\ /\alpha\varphi\beta\ \hat{}\ \alpha\psi\beta/, \\
&/\mathrm{txt}\ \hat{}\ \alpha\varphi\beta/ \\
&\quad\to\ /\mathrm{txt}\ \hat{}\ \alpha\varphi\beta\ \hat{}\ \alpha\psi\beta/, \\
&/\alpha\varphi\beta\ \hat{}\ \mathrm{txt}\ / \\
&\quad\to\ /\alpha\varphi\beta\ \hat{}\ \mathrm{txt}\ \hat{}\ \alpha\psi\beta/, \\
&/\mathrm{txt}\ \hat{}\ \alpha\varphi\beta\ \hat{}\ \mathrm{txt}_1/ \\
&\quad\to /\mathrm{txt}\ \hat{}\ \alpha\varphi\beta\ \hat{}\ \mathrm{txt}_1\ \hat{}\ \alpha\psi\beta/, \\
&\quad \mid \varphi \neq \varepsilon,\ \varphi\to\psi\ \in D,\ \alpha\varphi\beta \text{は句}\}
\end{aligned}$$

$$\cup$$

$$\{\ /\varepsilon/\to/\varphi/, /\mathrm{txt}/\to/\mathrm{txt}\ \hat{}\ \varphi/ \mid \varepsilon\to\varphi\in D\}$$

$$\subset\ ({}^{T}\overline{V}^{\#}\cup V_D)^{*}\times\ ({}^{T}\overline{V}^{\#}\cup V_D)^{*}$$

である（'/ 'はテクストの両端を表わすメタ記号)。――要するに，

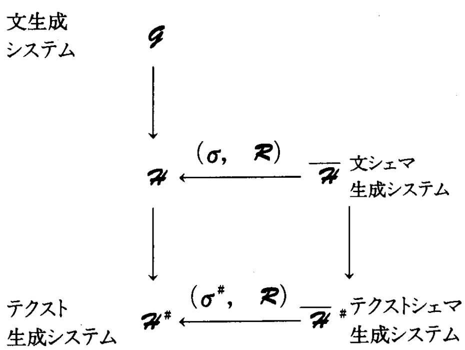
(＊)　《テクストΦと，Φの句φ，そしてDで定義されている変形によってφから導かれる文ψに対する変形

$$\Phi \to \Phi\ \hat{}\ \psi$$

は，テクスト変形規則》

と定めようというわけである。

なお以下，簡単のために，Dの記述を以って$D^{\#}$の記述に代えることにする。



3.2.3　理論

文生成システム$\mathcal{G}$の上の理論（論理体系）を，システム

$$\mathcal{T} = (\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \mathcal{U},\ \hat{\mathcal{U}})$$

として，以下のように定義する：

(1)　$(\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \mathcal{U})$，$\mathcal{U} = (\mathcal{S},\ \mathcal{D})$は，文生成変形システム：

(2)　$(\mathcal{G}^{\#},\ \mathcal{H}^{\#},\ \hat{\mathcal{U}})$，$\hat{\mathcal{U}} = (\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$は，テクスト生成変形システム：

(2-1)　$\hat{\mathcal{S}}$は，$\mathcal{S}^{\#}$　の拡張：

$$\mathcal{S} = (\hat{\mathcal{H}},\ \sigma^{\#},\ \hat{\mathcal{R}}),\ \mathcal{S}^{\#} = (\overline{\mathcal{H}}^{\#},\ \sigma^{\#},\ \mathcal{R})$$

$$\hat{\mathcal{H}} = ({}^{N}\overline{V}^{\#},\ {}^{T}\hat{V}^{\#},\ \hat{P}^{\#},\ \overline{\mathrm{TXT}})$$

$$\overline{\mathcal{H}}^{\#} = ({}^{N}\overline{V}^{\#},\ {}^{T}\overline{V}^{\#},\ \overline{P}^{\#},\ \overline{\mathrm{TXT}})$$

(2-2)　$\hat{\mathcal{D}} = (\hat{V}_D,\ \hat{D})$は，$\mathcal{D}^{\#} = (V_D,\ D^{\#})$の拡張。

$\mathcal{G}$の文シェマ（即ち，$\overline{\mathrm{SEN}}$から生成される$\overline{\mathcal{G}}$の記号列）αで，

$$\varepsilon\to\alpha$$

が$\mathcal{D}$で定義される変形規則になるものは，“公理シェマ”と呼ばれる。

公理シェマをシェマとする$\mathcal{G}$の文(即ち，代入によって公理シェマから導かれる$\mathcal{G}$の文)を“公理”と呼ぶ。

$\hat{\mathcal{D}}$で定義される変形規則は，理論$\mathcal{T}$の推論規則と呼ばれる。

“公理シェマ”と$\hat{\mathcal{D}}\supset\mathcal{D}^{\#}$の定義から，公理シェマ$\alpha$に対する

$$\varepsilon\to\alpha$$
$$\mathrm{txt}\to\mathrm{txt}\ \hat{}\ \alpha$$

は推論規則である。

3.2.4　理論の構成

ここで，システムとしての理論$\mathcal{T}$の構成を，まとめて示しておく：

(1)　理論：

$$\mathcal{T} = (\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \mathcal{U},\ \hat{\mathcal{U}})$$

(2)　土台となる文生成システム：

$$\mathcal{G}$$

(3)　$\mathcal{G}$の拡張で，$\mathcal{G}$と同値な文生成システム：

$$\mathcal{H} = ({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ \mathrm{SEN})$$

(4)　$\mathcal{G}$の上の文変形システム：

$$(\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \mathcal{U})$$

(4.1) $\mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D})$

(4.2) $\mathcal{H}$のシェマシステム：

$$\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{H}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$$

$$\overline{\mathcal{H}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{SEN})$$

(4.3) $\mathcal{H}$の上の変形プロダクション：

$$\mathcal{D}=(V_D,\ D)$$

(5) $\mathcal{H}$から導出される，テクスト生成システム：

$$\mathcal{H}^{\#}=({}^{N}V^{\#},\ {}^{T}V^{\#},\ P^{\#},\ TXT)$$

(6) $(\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \mathcal{U})$から導出される，$\mathcal{G}^{\#}$の上のテクスト変形システム：

$$(\mathcal{G}^{\#},\ \mathcal{H}^{\#},\ \mathcal{U}^{\#})$$

(6.1) $\mathcal{U}^{\#}=(\mathcal{S}^{\#},\ \mathcal{D}^{\#})$

(6.2) $\mathcal{S}$から導出される$\mathcal{H}^{\#}$のシェマシステム：

$$\mathcal{S}^{\#}=(\overline{\mathcal{H}}^{\#},\ \sigma^{\#},\ \mathcal{R})$$

$$\overline{\mathcal{H}}^{\#}=({}^{N}\overline{V}^{\#},\ {}^{T}\overline{V}^{\#},\ \overline{P}^{\#},\ \overline{TXT})$$

(6.3) $\mathcal{D}$から導出される$\mathcal{H}^{\#}$の上の変形プロダクション：

$$\mathcal{D}^{\#}=(V_D,\ D^{\#})$$

(7) $\mathcal{G}^{\#}$の上のテクスト変形システム：

$$(\mathcal{G}^{\#},\ \mathcal{H}^{\#},\ \mathcal{U})\supset(\mathcal{G}^{\#},\ \mathcal{H}^{\#},\ \mathcal{U}^{\#})$$

(7.1) $\hat{\mathcal{U}}=(\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$

(7.1) $\mathcal{H}^{\#}$のシェマシステム：

$$\hat{\mathcal{S}}=(\hat{\mathcal{H}},\ \sigma^{\#},\ \hat{\mathcal{R}})\supset\mathcal{S}^{\#}$$

$$\hat{\mathcal{H}}=({}^{N}\overline{V}^{\#},\ {}^{T}\hat{V}^{\#},\ \hat{P}^{\#},\ \overline{TXT})\supset\overline{\mathcal{H}}^{\#}$$

(7.2) $\mathcal{H}^{\#}$の上の変形プロダクション

$$\hat{\mathcal{D}}=(\hat{V}_D,\ \hat{D})\supset\mathcal{D}^{\#}$$

3.3 演繹，証明，定理

3.3.1 仮定からの演繹

$\mathcal{G}$の文シェマの有限集合Σと，テクストｓ：

$$p_1\ \hat{}\ p_2\ \hat{}\cdots\cdots\ \hat{}\ p_n \qquad (p_i：句)$$

に対し，

《各p_iは，Σの中にシェマをもつか，そうでなければ，

$$p_1\ \hat{}\cdots\cdots\ \hat{}\ p_{i-1}\overset{*}{\underset{D}{\to}}p_1\ \hat{}\cdots\cdots\ \hat{}\ p_{i-1}\ \hat{}\ p_i$$

である》

が成立しているとき，ｓは“仮定Σからの演繹”と呼ばれる。また，このようなｓの終端の文は，“仮定Σからの演繹によって結論される”あるいは“仮定Σの下で証明される”，“Σから導かれる”と言われる。

文φが仮定Σからの演繹によって結論されることを，“仮定Σの下で証明可能である”と言い表わし，$\Sigma\vdash\varphi$で表わす。

$p_1\ \hat{}\ p_2\ \hat{}\cdots\cdots\ \hat{}\ p_n$が仮定Σからの演繹であるとき，各$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$に対し，$p_1\ \hat{}\ p_2\ \hat{}\cdots\cdots\ \hat{}\ p_k$は仮定$\Sigma$の下での$p_k$の証明である。特に，$\Sigma\vdash p_k$。

3.3.2 証明，定理

公理シェマ(§3.2.3)の集合$\mathcal{A}$に対する“仮定$\mathcal{A}$からの演繹”，“仮定$\mathcal{A}$の下での証明”は，単に“演繹”，“証明”と呼ばれる。

証明可能な$\mathcal{G}$の文を，定理と呼ぶ。

公理は定理である。また，演繹は，定理を句とするテクストである（しかし，定理を句とするテクストが演繹であるのではない)。

以降，文の集合Σに対する$\Sigma\vdash\varphi$は，公理全体の集合を$\mathcal{A}$とするときの$\Sigma\cup\mathcal{A}\vdash\varphi$のことであると約束する。——なおこのとき，文$\phi$に対する$\{\phi\}\vdash\varphi$を，$\phi\vdash\varphi$と略記する。また，$\Sigma$が空集合のときの$\Sigma\vdash\varphi$を，$\vdash\varphi$と書く。$\vdash\varphi$は“$\varphi$は定理”の表現になる。

3.4 簡約表現の導入（“定義”）

3.4.1 簡約表現の導入

理論

$$\mathcal{T}=(\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ \mathcal{U},\ \hat{\mathcal{U}})$$

$$\mathcal{G}=({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ SEN),\quad \mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D})$$

において，通常“定義”の形で行なうところの簡約表現の導入——即ち，マクロ定義——は，

(1) ${}^{T}V$に記号を追加する；

(2) Ｐに規則を追加する；

(3) $\mathcal{D}$に変形補助記号と変形規則を追加する；

という形で行なうことができる。

${}^{T}V$，P，$\mathcal{D}$のこの更新は，もちろん理論$\mathcal{T}$の変更を意味する。しかし，それは同値な理論への変更であり，理論の本質的な変更ではない。そこで，簡約記号の導入による理論$\mathcal{T}$の理論

$\mathcal{T}'$への変更に対しては,

《われわれが理論 $\mathcal{T}$としていたものは，はじめから $\mathcal{T}'$のことであった》

と考えるようにし，理論 $\mathcal{T}$の更新とは考えないことにする。

3.4.2 簡約表現とメタ表現

マクロ定義の意味の“簡約表現の導入”に対して,“メタ表現の導入”の概念をつぎのように区別しておく。即ち，“簡約表現の導入”は，理論の書き直し——${}^{T}V$, P, $\mathcal{D}$の変更による——を意味するものとし,“メタ表現の導入”は,理論の書き直しを意味するものではないとする。

例えば，規則：

《下付きの１をm個ともなうxを, x_m のように略記する》

は，理論の書き直し——生成・変形規則を明示する形の——として述べられているときには,簡約表現の定義と見なし,そうでないときには,メタ表現使用の規則と見なす。

3.5 理論の例

ここでは，われわれが示した理論の定式化の妥当性を，いくつかの具体的な理論に対して試してみる。

3.5.1 加法の理論

3.5.1.1 理論の定式化

加法の理論は，文生成システム $\mathcal{G}$の上の理論

$$\mathcal{T}=(\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ (\mathcal{S},\ \mathcal{D}),\ (\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}}))$$

としては，以下のように定義される。

(1) $\mathcal{G}$を，加法に関する等式を生成するシステム (${}^{N}V$, ${}^{T}V$, P, SEN) として，つぎのように定義する(註1)：

${}^{N}V$：

SEN：等式生成に関する

TRM(註2), N

：項生成に関する

${}^{T}V=\{1, +, =\}$

P：

SEN → TRM = TRM

TRM → TRM+TRM

TRM → N1

N → N1

N → ε

(2) $\mathcal{G}$と同値な文生成システム $\mathcal{H}=({}^{N}V', {}^{T}V, P', SEN)$は,

${}^{N}V'$：${}^{N}V$に

L，R：それぞれ，項の左，右につくことのできる文字列の生成に関する

を追加したもの。

P′：

SEN → TRM = TRM

TRM → TRM+TRM

TRM → N1

N → N1

N → ε

L → TRM+

L → TRM

L → ε

R → +TRM

R → TRM

R → ε

(3) $\mathcal{H}$のシェマシステム $\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{H}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$では,

(3-1) $\overline{\mathcal{H}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{SEN})$は,

${}^{N}\overline{V}$：

$\overline{SEN}$：SENに対応

$\overline{T}$, $\overline{U}$, $\overline{N}$, $\overline{TRM}$

：項シェマ生成に関する

$\overline{L}$, $\overline{R}$：L，Rに対応

${}^{T}\overline{V}={}^{T}V\cup\{trm^{(註2)},\ {}_{1},\ \lambda,\ \rho\}$

$\overline{P}$：

$\overline{SEN}\to\overline{T}=\overline{T}$

$\overline{T}\to\overline{T}+\overline{T}$

$\overline{T}\to\overline{TU}$

$\overline{T}\to\overline{N}1$

$\overline{N}\to\overline{N}1$

$\overline{N}\to\varepsilon$

$\overline{T}\to\overline{TRM}$

$\overline{TRM}\to\overline{TRM}_1$

$\overline{TRM}\to trm$

$\overline{\mathrm{U}} \quad \to \overline{\mathrm{N}}$
$\overline{\mathrm{U}} \quad \to \overline{\mathrm{TRM}}$
$\overline{\mathrm{U}} \quad \to \varepsilon$
$\overline{\mathrm{L}} \quad \to \lambda$
$\overline{\mathrm{R}} \quad \to \rho$

(3-2)　σ：
$\overline{\mathrm{SEN}} \to \mathrm{SEN}$
$\overline{\mathrm{TRM}} \to \mathrm{TRM}$
$\overline{\mathrm{L}} \quad \to \mathrm{L}$
$\overline{\mathrm{R}} \quad \to \mathrm{R}$

(3-3)　代入規則は，原初的代入規則。

(4)　$\mathcal{D}$では，

(4-1)　変形補助記号は無し。

(4-2)　変形規則は，

(a0)　$\varepsilon \to 1=1$
(a1)　$11 \to 1+1$
(a2)　$11+ \to 1+1$
(a3)　$= \to 1=1$

(5)　$\hat{\mathcal{S}}$は，$\mathcal{S}^{\#}=(\overline{\mathcal{G}}^{\#}, \sigma^{\#}, \mathcal{R}^{\#})$の$\overline{\mathcal{G}}^{\#}$に対し，終端記号に

txt

を追加し，プロダクションに

$\overline{\mathrm{TXT}} \to \overline{\mathrm{TXT}_1}$
$\overline{\mathrm{TXT}} \to \mathrm{txt}$

を追加したもの。

(6)　$\hat{\mathcal{D}}$は$\mathcal{D}^{\#}$に同じ。即ち，φを txt ^ あるいは /，ψを ^txt/ あるいは /——但し，/ は，テクストの端を表わすメタ記号——とするとき(註3)，(4-2) の

(a1) に対応して，

Φ：$\varphi \mathrm{trm}=\lambda 11\rho\psi$ に対し，
$\Phi \to \Phi$ ^$\mathrm{trm}=\lambda 1+1\rho$
Φ：$\varphi\lambda 11\rho=\mathrm{trm}\psi$ に対し，
$\Phi \to \Phi$ ^$\lambda 1+1\rho=\mathrm{trm}$

(a2) に対応して，

Φ：$\varphi \mathrm{trm}=\lambda 11+\mathrm{trm}1\psi$ に対し，
$\Phi \to \Phi$ ^$\mathrm{trm}=\lambda 1+1\mathrm{trm}_1$
Φ：$\varphi\lambda 11+\mathrm{trm}=\mathrm{trm}_1\psi$ に対し，
$\Phi \to \Phi$ ^$\lambda 1+1\mathrm{trm}=\mathrm{trm}_1$

(a3) に対応して，

Φ：$\varphi \mathrm{trm}=\mathrm{trm}_1\psi$ に対し，
$\Phi \to \Phi$ ^$\mathrm{trm}1=1\mathrm{trm}_1$

（註1）　これは，つぎのように述べられた“式の生成規則”と同じ（§1.6.2 参照）：
1° 1は項である；
2° 項Uに対し，U1は項である；
3° 項U，Vに対し，U+Vは項である；
4° 項U，Vに対し，U＝Vは式である；
5° 1° から4° を有限回適用して導かれる式のみが，式である。

（註2）　TRM，trmは，“TeRM（項）”。

（註3）　ここでのΦ，φ，ψは，メタ記号である。メタ記号を用いて記述が長くなるのを避けたわけであるが，メタ記号を排除して理論の本来の記述に直すことは，容易である。

例えば，(a1)に対応する規則をきちんと書けば，つぎのようになる：

txt ^ $\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$ ^ txt_1
　$\to$ txt ^ $\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$ ^ txt_1 ^ $\mathrm{trm}=\lambda 1+1\rho$
txt ^ $\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$
　$\to$ txt ^ $\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$ ^ $\mathrm{trm}=\lambda 1+1\rho$
$\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$ ^ txt_1
　$\to$ $\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$ ^ txt_1 ^ $\mathrm{trm}=\lambda 1+1\rho$
$\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$
　$\to$ 　$\mathrm{trm}=\lambda 11\rho$ ^ $\mathrm{trm}=\lambda 1+1\rho$
txt ^ $\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$ ^ txt_1
　$\to$ txt ^ $\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$ ^ txt_1 ^ $\lambda 1+1\rho=\mathrm{trm}$
txt ^ $\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$
　$\to$ txt ^ $\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$ ^ $\lambda 1+1\rho=\mathrm{trm}$
$\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$ ^ txt_1
　$\to$ $\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$ ^ txt_1 ^ $\lambda 1+1\rho=\mathrm{trm}$
$\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$
　$\to$ $\lambda 11\rho=\mathrm{trm}$ ^ $\lambda 1+1\rho=\mathrm{trm}$

3.5.1.2　証明の例

$$111111111=111+11+1111$$

の証明が，つぎのようになる：

$1=1$	(a0)
^ $11=11$	(a3)
^ $111=111$	(a3)
^ $1111=1111$	(a3)
^ $11111=11111$	(a3)

$\hat{}\ 111111 = 111111$　　(a3)
$\hat{}\ 1111111 = 1111111$　　(a3)
$\hat{}\ 11111111 = 11111111$　　(a3)
$\hat{}\ 111111111 = 111111111$　　(a3)
$\hat{}\ 111111111 = 11111111+1$　　(a1)
$\hat{}\ 111111111 = 1111111+11$　　(a2)
$\hat{}\ 111111111 = 111111+111$　　(a2)
$\hat{}\ 111111111 = 11111+1111$　　(a2)
$\hat{}\ 111111111 = 1111+1+1111$　　(a1)
$\hat{}\ 111111111 = 111+11+1111$　　(a2)

ここで，例えば，証明

$$1 = 1\ \hat{}\ 11 = 11$$

からの証明

$$1 = 1\ \hat{}\ 11 = 11\ \hat{}\ 111 = 111$$

の導出は，つぎの変形による：

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l} 1=1 \\ \hat{}\ 11=11 \end{array} & \begin{array}{l} \mathrm{txt} \\ \hat{}\ \mathrm{trm}=\mathrm{trm}_1 \end{array} \arrow[l, "\text{(代入)}"'] \arrow[d, "\text{(a3) による変形}"] \\
\begin{array}{l} 1=1 \\ \hat{}\ 11=11 \\ \hat{}\ 111=111 \end{array} & \begin{array}{l} \mathrm{txt} \\ \hat{}\ \mathrm{trm}=\mathrm{trm}_1 \\ \hat{}\ \mathrm{trm}1=1\mathrm{trm}_1 \end{array} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

ここで，$\xleftarrow{\text{(代入)}}$ は，

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{TXT}} \underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow} \mathrm{txt} \arrow[d, "\sigma^{\#}"'] \\
\overline{\mathrm{TXT}} \overset{*}{\underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow}} 1=1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{TRM}} \underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow} \mathrm{trm} \arrow[d, "\sigma"'] & \overline{\mathrm{TRM}} \underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow} \mathrm{trm}_1 \arrow[d, "\sigma"'] \\
\mathrm{TRM} \overset{*}{\underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow}} 11 & \mathrm{TRM} \overset{*}{\underset{\mathrm{P}}{\Rightarrow}} 11
\end{tikzcd}$$

によって定義される代入枠

$$\{(\mathrm{txt},\ 1=1),\ (\mathrm{trm},\ 11),\ (\mathrm{trm}1,\ 11)\}$$

の下の直接代入

$$\{\mathrm{txt} \to 1=1,\ \mathrm{trm} \to 11,\ \mathrm{trm}_1 \to 11\}$$

である。

3.5.2　二進数の加算の等式理論

3.5.2.1　理論の定式化

二進数の加算の妥当な等式を生成する理論が，つぎのように定義できる。

(1)　二進数の加算の等式を，文生成システム $\mathscr{G} = ({}^{N}V, {}^{T}V, P, SEN)$ の生成するものと見なす。ここで，

${}^{N}V$：

SEN　：等式生成に関する
TRM　：項生成に関する
NUM(註1)　：数生成に関する
STR(註2)　：数記号の列の生成に関する

${}^{T}V = \{1,\ 0,\ +,\ =\}$

P：

$SEN \to TRM = TRM$
$TRM \to TRM + NUM$
$TRM \to NUM$
$NUM \to 0$
$NUM \to 1STR$
$STR \to STR0$
$STR \to STR1$
$STR \to \varepsilon$

(2)　$\mathscr{H}$ は，$\mathscr{G}$ の ${}^{N}V$ に

U：一位数生成に関する

を追加し，P に

$U \to 0$
$U \to 1$

を追加したもの。

(3)　$\mathscr{H}$ のシェマシステム $\hat{\mathscr{S}} = (\overline{\mathscr{H}},\ \sigma,\ \mathscr{R})$ では，

(3-1)　$\overline{\mathscr{H}} = ({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}V,\ \overline{P},\ \overline{SEN})$ は，

${}^{N}\overline{V}$：

$\overline{SEN}$　：等式シェマ生成に関する
$\overline{TRM}$　：項シェマ生成に関する
$\overline{NUM}$　：数生成に関する

$\overline{STR}$ ：数記号の列の生成に関する

$\overline{U}$ ：Uに対応

${}^{T}\overline{V} = {}^{T}V \cup \{\varphi, \nu, m, n, s, t\}$

$\overline{P}$：

$\overline{SEN} \to \overline{TRM} = \overline{TRM}$

$\overline{TRM} \to \overline{TRM} + \overline{NUM}$

$\overline{TRM} \to \overline{NUM}$

$\overline{NUM} \to 0$

$\overline{NUM} \to 1\overline{STR}$

$\overline{STR} \to \overline{STR}0$

$\overline{STR} \to \overline{STR}1$

$\overline{STR} \to \varepsilon$

$\overline{SEN} \to \varphi$

$\overline{NUM} \to \nu$

$\overline{STR} \to s$

$\overline{STR} \to t$

$\overline{U} \to m$

$\overline{U} \to n$

(3-2) σ：

$\overline{SEN} \to SEN$

$\overline{NUM} \to NUM$

$\overline{STR} \to STR$

$\overline{U} \to U$

(3-3) 代入規則は原初的代入規則。

(4) $\mathcal{D} = (V_D, D)$ を，つぎのように定義する：

(4-1) $V_D = \{\$, \#, {}^{1}\}$

(4-2) D：

(00) $\varepsilon \to 1=1$

(01) $= \to +1=1+$

(a1) $\hat{}\,s+t= \to \hat{}\,\$s+t\$=$

(a2) $\hat{}\,s+t+ \to \hat{}\,\$s+t\$+$

(a3) $=s+t/ \to =\$s+t\$/$

(a4) $=s+t+ \to =\$s+t\$+$

(a5) $+s+t+ \to +\$s+t\$+$

(b1) $\$sm+tn\$ \to \$s+t\#m+n\#\$$

(b2) $\$sm+tn\# \to \$s+t\#m+n\#$

(c1) $\#0+n\# \to \#n$

(c2) $\#1+0\# \to \#1$

(c3) $\#1+1\# \to {}^{1}\#0$

(d1) $+{}^{1} \to +1$

(d2) $0^{1} \to 1$

(d3) $1^{1} \to {}^{1}0$

(e1) $\$s+\# \to \$s$

(e2) $\$+s\# \to \$s$

(e3) $\$+\# \to \$$

(f) $\$s\$ \to s$

ここで“/”は，式の端を示すメタ記号である(変形補助記号ではない)。

(5) $\hat{\mathcal{S}}$は，$\mathcal{S}^{\#} = (\overline{\mathcal{H}}^{\#}, \sigma^{\#}, \mathcal{R}^{\#})$ の $\overline{\mathcal{H}}^{\#}$に対し，終端記号に

$$txt,\ {}_{1}$$

を追加し，プロダクションに

$$\overline{TXT} \to \overline{TXT}_{1}$$
$$\overline{TXT} \to txt$$

を追加したもの。

(6) $\hat{\mathcal{D}}$は，$\mathcal{D}^{\#}$と同じ。

（註１） NUM は，“NUMber（数）”。

（註２） STR は，“STRing（記号列）”。

3.5.2.2 証明の例

等式

$$10+11+1=110$$

を定理として示す証明は，つぎのようになる：

$1=1$

$\hat{}\,1+1=1+1$

$\hat{}\,1+1+1=1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1=1+1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1+1=1+1+1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1+1+1=110$

$\hat{}\,10+1+1+1+1=110$

$\hat{}\,10+11+1=110$

ここで，例えば，文字列

$1=1$

$\hat{}\,1+1=1+1$

$\hat{}\,1+1+1=1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1=1+1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1+1=1+1+1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1$

$\hat{}\,1+1+1+1+1+1=110$

をX（Xはメタ記号）とおいたときの，証明

X

$\hat{}\,10+1+1+1+1=110$

からの証明

$$\begin{array}{l}
X \\
\hat{}\,10+1+1+1+1=110 \\
\hat{}\,10+11+1=110
\end{array}$$

の導出は，

$$\begin{array}{ll}
X & \leftarrow txt \\
\hat{}\,10+1+1+1+1=110 & \hat{}\,\nu+1+1+1+\varphi \\
 & \downarrow \\
X & \leftarrow txt \\
\hat{}\,10+1+1+1+1=110 & \hat{}\,\nu+1+1+1+\varphi \\
\hat{}\,10+11+1=110 & \hat{}\,\nu+11+\varphi
\end{array}$$

である。ここで，←は代入

$\{txt\rightarrow X,\ \nu\rightarrow 10,\ \varphi\rightarrow 1=110\}$,

そして，↓はつぎに示す変形(但し，txt $\hat{}\,\nu$ をZとおく）から導かれる変形である：

$$\begin{array}{ll}
Z+1+1+1+\varphi & \leftarrow Z+s+t+1+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (a5) \\
Z+\$1+1\$+1+\varphi & \leftarrow Z+\$s+t\$+1+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$1+1\$+1+\varphi & \leftarrow Z+\$\sigma m+\tau n\$+1+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (b1) \\
Z+\$+\#1+1\#\$+1+\varphi & \leftarrow Z+\$\sigma+\tau\#m+n\#\$+1+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$+\#1+1\#\$+1+\varphi & = Z+\$+\#1+1\#\$+1+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (c3) \\
Z+\$+{}^{1}\#0\$+1+\varphi & = Z+\$+{}^{1}\#0\$+1+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$+{}^{1}\#0\$+1+\varphi & = Z+\$+{}^{1}\#0\$+1+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (d1) \\
Z+\$+1\#0\$+1+\varphi & = Z+\$+1\#0\$+1+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$+1\#0\$+1+\varphi & = Z+\$+1\#0\$+1+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (e2) \\
Z+\$10\$+1+\varphi & = Z+\$10\$+1+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$10\$+1+\varphi & = Z+\$10\$+1+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (c1) \\
Z+10+1+\varphi & = Z+10+1+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+10+1+\varphi & \leftarrow Z+s+t+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (a5) \\
Z+\$10+1\$+\varphi & \leftarrow Z+\$s+t\$+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$10+1\$+\varphi & \leftarrow Z+\$\sigma m+\tau n\$+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (b1) \\
Z+\$1+\#0+1\#\$+\varphi & \leftarrow Z+\$\sigma+\tau\#m+n\#\$+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$1+\#0+1\#\$+\varphi & = Z+\$1+\#0+1\#\$+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (c1) \\
Z+\$1+\#1\$+\varphi & = Z+\$1+\#1\$+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$1+\#1\$+\varphi & = Z+\$1+\#1\$+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (e1) \\
Z+\$11\$+\varphi & = Z+\$11\$+\varphi \\
\quad\| & \\
Z+\$11\$+\varphi & = Z+\$11\$+\varphi \\
 & \quad\downarrow\ (f) \\
Z+11+\varphi & = Z+11+\varphi
\end{array}$$

3.5.3　準Thueシステム

3.5.3.1　理論の定式化

準Thueシステムも，われわれの定式化した理論と見なせる。

ここで準Thueシステムとは，組 $\mathcal{T}=(L,\ \alpha,\ \pi)$ で，つぎの条件を満たすもののことである：

(1)　Lは，記号の有限集合でアルファベットと呼ばれる。
(2)　αは，公理と呼ばれる一つの空でない記号列。
(3)　πは，準Thueプロダクションの有限集合。但し準Thueプロダクションとは，記号列x，yに対する $x\rightarrow y$ の形のプロダクション（即ち，文脈自由にxをyで置き換えることを許すプロダクション）のこと。

$\mathcal{T}=(L,\ \alpha,\ \pi)$ は，つぎのようにして，理論

$$\mathcal{T}'=(\mathcal{G},\ \mathcal{H},\ (\mathcal{S},\ \mathcal{D}),\ (\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}}))$$

と見なせる：

(1)　$\mathcal{G}=({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ SEN)$ は，

$${}^{N}V=\{SEN\}$$

$${}^{T}V=L$$

P：

$$\mathrm{SEN} \to \mathrm{SEN}x \qquad (x \in L)$$
$$\mathrm{SEN} \to \varepsilon$$

(2) $\mathcal{H}$は$\mathcal{G}$に同じ。

(3) $\mathcal{S} = (\overline{\mathcal{G}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$では，

(3-1) $\overline{\mathcal{G}} = ({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{\mathrm{SEN}})$は，

${}^{N}\overline{V} = \{\overline{\mathrm{SEN}},\ \overline{\mathrm{SVR}}\}$(註)

${}^{T}\overline{V} = L \cup \{\varphi,\ 1\}$

$\overline{P}$：

$$\overline{\mathrm{SEN}} \to \overline{\mathrm{SEN}}x \qquad (x \in L)$$
$$\overline{\mathrm{SEN}} \to \varepsilon$$
$$\overline{\mathrm{SEN}} \to \overline{\mathrm{SEN}}\,\overline{\mathrm{SVR}}$$
$$\overline{\mathrm{SVR}} \to \overline{\mathrm{SVR}}_1$$
$$\overline{\mathrm{SVR}} \to \varphi$$

(3-2) σ：

$$\overline{\mathrm{SEN}} \to \mathrm{SEN}$$

(3-3) 代入規則は原初的代入規則。

(4) $\mathcal{D} = (\phi,\ \{\varepsilon \to \alpha\} \cup \pi)$。

(5) $\hat{\mathcal{S}}$は，$\mathcal{S}^{*} = (\overline{\mathcal{G}}^{*},\ \sigma^{*},\ \mathcal{R}^{*})$の$\overline{\mathcal{G}}^{*}$に対し，終端記号に

$$\mathrm{txt}$$

を追加し，プロダクションに

$$\overline{\mathrm{TXT}} \to \overline{\mathrm{TXT}}_1$$
$$\overline{\mathrm{TXT}} \to \mathrm{txt}$$

を追加したもの。

(6) $\hat{\mathcal{D}}$は，$\mathcal{D}^{*}$。

このように定義した$\mathcal{T}'$に関する証明，定理は，確かに，$\mathcal{T}$に関する証明，定理と同じものになる。

(註) SVRは，“Sentence-VaRiable”。

3.5.3.2 証明の例

πに

$$a \to b$$

が属するとき，記号列Φ：

$$L\varphi a\varphi_1 R$$

(Lは^あるいは/，Rは^txt/あるいは/——但し，/はテクストの端を表わすメタ記号)に対して，

$$\Phi \to \Phi\varphi b\varphi_1$$

が推論規則になる。(ここで，a，b，Φ，L，Rはメタ記号。)

そこで例えば，記号列X，s，t，Yに対するテクストX^sat^Yからは，変形：

$$\begin{array}{lcl} X & \leftarrow & \mathrm{txt} \\ \hat{}\,\mathrm{sat} & & \hat{}\,\varphi a\varphi_1 \\ \hat{}\,Y & & \hat{}\,\mathrm{txt}_1 \\ & \big\downarrow & \\ X & \leftarrow & \mathrm{txt} \\ \hat{}\,\mathrm{sat} & & \hat{}\,\varphi a\varphi_1 \\ \hat{}\,Y & & \hat{}\,\mathrm{txt}_1 \\ \hat{}\,\mathrm{sbt} & & \hat{}\,\varphi b\varphi_1 \end{array}$$

によって，テクストX^sat^Y^sbtが演繹される。但し，←は，

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathrm{TXT}} \underset{P}{\Rightarrow} \mathrm{txt} & \qquad & \overline{\mathrm{TXT}} \underset{P}{\Rightarrow} \mathrm{txt} \\ \sigma^{*}\big\downarrow & & \sigma^{*}\big\downarrow \\ \mathrm{TXT} \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} X & & \mathrm{TXT} \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} Y \\ & & \\ \overline{\mathrm{SEN}} \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} \varphi & & \overline{\mathrm{SEN}} \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} \varphi_1 \\ \sigma\big\downarrow & & \sigma\big\downarrow \\ \mathrm{SEN} \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} a & & \mathrm{SEN} \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} b \end{array}$$

によって定義される代入枠

$$\{(\mathrm{txt},\ X),\ (\varphi,\ a),\ (\varphi_1,\ b),\ (\mathrm{txt}_1,\ Y)\}$$

の下の直接代入

$$\{\mathrm{txt} \to X,\ \varphi \to s,\ \varphi_1 \to t,\ \mathrm{txt} \to Y\}$$

である。