寄　　稿

「1と見る」の数学*

宮　下　英　明**

要　約

小学算数では，量の倍の合成を構造とする問題は，「割合」の問題とされ，そしてこの問題解決で「1と見る」をやる。このようになるのは，「数は量の抽象」の立場に立っているからである。数の積は＜倍の合成＞の図式に現れるのだが，「数は量の抽象」の立場では，数の積は量の積の抽象でなければならない。よって，量の倍の合成の構造を素直に立て，そして数の積を素直に立式するということができない。そのゆがんだ形が「1と見る」であり「比の3用法」であり，そして「割合」の概念の曖昧な保持の仕方である。「1と見る」の意味を明らかにする方法は，これの数学を示すことである。そして，この数学が，「1と見る」が小学算数に本来あるべきでないことを明らかにする。

キーワード：1と見る，割合，「数は量の抽象」

1. はじめに

本論考は，[1] に続くものである。「数は量の抽象」の立場は，＜倍の合成＞を構造とする量計算の問題を「割合の問題」と解し，「1と見る」を使って解かれるとする。「1と見る」を論じることは，これの数学を論じることになり，そしてその数学は初等的ではない。よって，[1] では論点を拡げないために，「1と見る」を詳しく取り上げなかった。これを，本論考で行う。

学校数学で「1と見る」を指導する教員は，理屈としては，「1と見る」の数学を承知していることになる。しかし，「数は量の抽象」の考え方から出てくる「1と見る」は，数学になっていない。また，「1と見る」を数学にしたときのそれは，大学の数学で代数的構造の同型そして線型空間論をだいぶやったところで扱える内容である。そして，これは問題解決に必要となる内容ではない。

いずれにしても，「1と見る」は本質的でない。すなわち，これは学習主題の本質を見えなくするものである。

本論考は，この問題をつぎの構成で論ずる：

1. 「割合の問題」の数学的解法と，「数は量の抽象」の立場が唱える解法を，それぞれ確認する。
2. 「1と見る」の数学を，確認する。
   ——これは，小学算数で扱える内容ではないし，そもそも無用である。
3. 「1と見る」は，＜倍の合成＞を構造とする量計算を，混沌としたものにするだけである。
4. 「1と見る」を小学算数の内容にするのは，「数は量の抽象」の世界観の満足に過ぎない。（実際，数は量の比の表現に使えるようつくられるものであって，数を量の抽象とする論は誤りである。）
5. 「1と見る」は，小学算数にあるべきものではなく，したがって，やめるべきもので

* 平成20年11月10日受付，平成20年11月24日決定
** 北海道教育大学教授

ある。

6. ただし，「1と見る」をやめるとは，＜倍の合成＞をもとにした「×・÷」の文法が指導内容になるということである。――この変更を至難とするときは，「数は量の抽象」「1と見る」に甘んじるしかない。

2. ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法

最初に，つぎの３つの問題の解法――数学的解法と「割合の問題の解法」(「数は量の抽象」の立場が唱える解法)――を確認する：

「２ｇの何倍が６ｇか？」

「２ｇの３倍は何ｇか？」

「何ｇの３倍が６ｇか？」

(「ｇ」は，重さの「グラム」)

数学的解法は，表１のようになる。そして，「割合の問題の解法」は，表２のようになる。

3.「割合の問題の解法」

「数は量の抽象」の立場では，数は量である。「割合」も，量として定義されねばならない。そこで，表２にあるような「割合」の定義になる。――特に，「倍」としてつぎのように描かれるものには，ならない：

$2\,g \xrightarrow{何} 6\,g \quad 2\,g \xrightarrow{3} 何\,g \quad 何\,g \xrightarrow{3} 6\,g$

$g \xrightarrow{2} 2g \quad g \xrightarrow{6} 6g \quad g \xrightarrow{何} 何g$

「比の３用法」は，事物の存在法則のような位置づけの＜公理＞である。実際，「数は量の抽象」の立場は，量を実体概念にする。「比の３用法」を記述している「×・÷」も実体概念である。これを数学的に定式化しようとしたら，没論理ないし循環論法になる。

表 1: ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法

問題	「2gの何倍が6gか?」	「2gの3倍は何gか?」	「何gの3倍が6gか?」
問題を図式化	$2\,g \xrightarrow{何} 6\,g$	$2\,g \xrightarrow{3} 何\,g$	$何\,g \xrightarrow{3} 6\,g$
「○g」を分析	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 2g \arrow[r, "何"] & 6g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何"'] & 2g \arrow[r, "3"] & 何g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 何g \arrow[r, "3"] & 6g \end{tikzcd}$
「×」の文法	$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$		
積の立式	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6 = 2 \times 何"'] & 2g \arrow[r, "何"] & 6g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何 = 2 \times 3"'] & 2g \arrow[r, "3"] & 何g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6 = 何 \times 3"'] & 何g \arrow[r, "3"] & 6g \end{tikzcd}$
「÷」の文法	$m \times ○ = ○ \times m = n$ 「n ÷ m」		
「何＝‥‥」の形	何 ＝ 6 ÷ 2	何 ＝ 2 × 3	何 ＝ 6 ÷ 3

表 2:「割合の問題の解法」

問題	「２ｇの何倍が６ｇか?」	「２ｇの３倍は何ｇか?」	「何ｇの３倍が６ｇか?」
「割合」的表現	２ｇに対する６ｇの割合は?	２ｇに対する何ｇの割合が３か?	何ｇに対する６ｇの割合が３か?
もとにする量を「1と見る」	２ｇ → 1　６ｇ	２ｇ → 1　何ｇ	何ｇ → 1　６ｇ
比較する量の抽象になる数が割合になる	２ｇ → 1　６ｇ → 何	２ｇ → 1　何ｇ → 3	何ｇ → 1　６ｇ → 3
「比の３用法」(公理) の適用	第１用法より: 何 ＝ ６ｇ ÷ ２ｇ	第２用法より: 何ｇ ＝ ２ｇ × ３	第３用法より: 何ｇ ＝ ６ｇ ÷ ３
数の「×・÷」は量の「×・÷」の抽象	何 ＝ ６ ÷ ２	何 ＝２ × ３	何 ＝ ６ ÷ ３

「何＝６ｇ÷２ｇ，何ｇ＝２ｇ×３，何ｇ＝６ｇ÷３」から「何＝６÷２，何＝２×３，何＝６÷３」を導くところも，数学的には没論理である。特に，記号の混乱が，先ず退けられるものになる。

すなわち，数学では，量の系に対する数の系を，量の作用域として定義する。「×」は，数の「内算法（演算）」である。量の内算法として定義されるのは，加法のみである。しかし，「数は量の抽象」の立場では，量には積がある。「何＝６÷２，何＝２×３，何＝６÷３」も，量の演算として意識されている。

このことを見るために，数学が行う「量としての数」の定式化――「１と見る」の数学的定式化――の形を押さえることにする。この内容は，初等的な数学のものではない。これをここで取り上げることが，算数教育の論としてふさわしくないと思えるとすれば，それはとりもなおさず，「１と見る」が小学算数の内容としてふさわしくないということである。「１と見る」の数学をここで改めて押さえようとするのは，「１と見る」が小学算数の内容としてふさわしいものかどうかを考えるためであり，このステップは避けられない。

4.「割合の問題の解法」批判には数学が必要

「数は量の抽象」論は，量を実体概念に定めるところから出発している。「数は量の抽象」の立場からの「割合の問題の解法」は，この独特な思考法によるものであって，数学ではない。しかしまた，これが算数教育を席巻している。＜倍の合成＞を構造とする問題の解決がこのやり方で「指導」されるとき，それは没論理であり，数学になっていない。生徒にとって難しい内容なのではなく，「わかった！」と言う生徒が出てきたら却って困るという代物なのである。

5.「１と見る」の数学

「１と見る」がどのような数学になるかを，ここで押さえる。

量の系Ｑ（例えば重さ）の代数的構造を考える。

Ｑの要素２つに対しては，和が考えられている。Ｑの要素 q_1 と q_2 に対し，これの和を $q_1 \boldsymbol{+} q_2$ で表すとしよう。（「$\boldsymbol{+}$」は太字の＋）

Ｑの要素に対しては，数の系Ｎ（例えば分数）の要素の倍作用が考えられている。Ｑの要素ｑとＮの要素ｎに対し，ｑのｎ倍を $q \,{}_{\boldsymbol{\times}}\, n$ で表す

としよう。(「$_{\boldsymbol{\times}}$」は下付太字の ×)

Nの要素２つに対しては，和と積が考えられている。Nの要素 n_1 と n_2 に対し，これの和と積をそれぞれ n_1+n_2，$n_1\times n_2$ で表す。

数の＋と × は，つぎの関係で条件付けられている (すなわち，これが＋と × の意味)：

$$q_{\boldsymbol{\times}} n_1 \boldsymbol{+} q_{\boldsymbol{\times}} n_2 = q_{\boldsymbol{\times}}(n_1+n_2)$$

$$(q_{\boldsymbol{\times}} n_1)_{\boldsymbol{\times}} n_2 = q_{\boldsymbol{\times}}(n_1\times n_2)$$

そして，これらの意味をすべて込めて，この構造をつぎのように表すとしよう：

$$((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (N, +, \times))$$

以上で，量の代数的な構造を規定したことになる。このような数学に慣れていない読者には，ここまでで既に相当疲れてしまうかも知れないが，「１と見る」にまで行くにはまだ一山ある。

すなわち，数の系 $(N, +, \times)$ を素材にして，

$$((N, +), \times, (N, +, \times))$$

をつくる。これは量の構造をもつものになる——すなわち，量になる。

さらに，Q の任意の要素 g に対して定まるつぎの対応 f が，$((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (N, +, \times))$ と $((N, +), \times, (N, +, \times))$ の間の同型対応になる。

$$f: g_{\boldsymbol{\times}} n \longmapsto n$$

さて, ここに出てきた「同型 f」が「１と見る」である。——実際, g を１と見ているわけである。

例えば，Qを重さの集合，Nを分数の集合，g を「グラム」としよう。教員は，生徒につぎのことをさせる：

２g を，２にする。

２g と３g の和を，２＋３で計算する。

２g の３倍を，２× ３で計算する。

このとき教員が生徒にさせていることは，実はつぎの計算 (式変形) である：

$$f(g_{\boldsymbol{\times}} 2) = 2$$

$$f(g_{\boldsymbol{\times}} 2 \boldsymbol{+} g_{\boldsymbol{\times}} 3) = f(g_{\boldsymbol{\times}}(2+3)) = 2+3$$

$$f((g_{\boldsymbol{\times}} 2)_{\boldsymbol{\times}} 3) = f(g_{\boldsymbol{\times}}(2\times 3)) = 2\times 3$$

さて，$((N, +), \times, (N, +, \times))$ は，N の要素を倍の作用素として考えるすべての量にとって，この量の構造を示すものになっている。数学のことばを用いれば,

$((N, +), \times, (N, +, \times))$ は，$(N, +, \times)$ の要素を倍の作用素としている量の「普遍対象 (universal object)」

ということになる。

「普遍対象」は，イデア論の「イデア」である。$((N, +), \times, (N, +, \times))$ は ＜Nを作用域とする量＞のイデアであり，イデア $((N, +), \times, (N, +, \times))$ の降りてきたものが ＜Nを作用域とする量＞である。——実際，数学で自体的に存在するのは，数であって，量ではない。

線型空間論で「体K上のn次元線型空間E」を少し進んだところで,「Kからの線型空間 K^n の導出」「線型空間Eと K^n の同型」の話が出てくるが，これが，いま論じている「１と見る」の数学と対応している。ただし,「線型空間」と「量」は同じではない。例えば，自然数 $(\mathbb{N}, +, \times)$ に対する量 $((\mathbb{N}, +), \times, (\mathbb{N}, +, \times))$ は，線型空間ではない。スカラが実数の２次元実線型空間 $((\mathbb{R}^2, \boldsymbol{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (\mathbb{R}, +, \times))$ は量ではないが, 複素数をスカラとしたときの１次元の線型空間 $((\mathbb{R}^2, \boldsymbol{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (\mathbb{C}, +, \times))$ は, $((\mathbb{C}, +), \times, (\mathbb{C}, +, \times))$ と同型なので，量である。

6.「１と見る」がもたらす混沌

量の問題は，前節で述べた「１と見る」をすることにより，数だけの問題に変わる。

量の問題の中には，つぎのものがある：

- 量と数
- 量に対する数の倍と，数の積の「×」
- 量の和と，数の和の「＋」

この問題を数だけの問題にしたとき，その数だけの問題の中には，つぎのものが混在することになる：

- ＜量としての数＞と数
- ＜量としての数＞に対する数の倍「×」と，数の積の「×」
- ＜量としての数＞の和の「＋」と，数の和の「＋」

この内容の理解は，やさしくない。しかし,「数は量の抽象」の立場からの「割合の問題の解法」も，没論理を含みつつも「１と見る」をやっているわけであり，したがって，数の２種類の身分の混在

が起こっている。生徒は，ドロップアウトしないとすれば，この混沌に＜慣れる＞しかない。

7.「１と見る」は,「数は量の抽象」の満足のため

「割合の問題」を解くにおいて，「１と見る」は無用である (§2)。しかも，＜量と数の区別＞が＜数の身分の区別＞に移されることで，数の身分の区別を読み切る力のない者には，その問題はまったく混沌としたものになる (§6)。

「１と見る」は, 問題解決を回りくどくする (わかりにくくする)「儀式」でしかない。では，なぜこの「儀式」が行われるのか？数を量の抽象ということにしたいからである。「数は量の抽象」の世界観の満足のために，＜倍の合成＞(これを構造とする問題の解決) の授業が数学の授業でなくなり，そしてこれの没論理に生徒が付き合わされる。

「数は量の抽象」は，数学ではない。数学の方法はというと，それは線型空間論に範が示されているものになる。すなわち，１次元のときのスカラとベクトルは，それぞれ数と量に対応するものになる。スカラはベクトルに対する作用素として，ベクトルの「比」を表す。そして，スカラはベクトルの抽象ではない──もしそうだとしたら，スカラはベクトルであり，線型空間論は壊れる。

8.「１と見る」は，やめるべき

以上,「１と見る」の数学を見てきた。数学にしたときの「１と見る」は，「割合の問題」を解くのには必要のないもの (無用の長物) である。そして，算数教育にあっては，扱うにしても消化できないものである。教員の未消化の問題ならまだしも，生徒にとっては被害問題である。

「数は量の抽象」の立場の「１と見る」は数学ではなく，また,「１と見る」の数学は初等的でない。したがって,「１と見る」はやめるべきというのが，本論考の結論になる。

9.「１と見る」をやめるとは，何をすること？

「１と見る」はやめるべきと述べた。しかし,「やめる」ができるためには，替わりにつぎのことが算数の内容に入ってこなければならない (§2)：

1.「ｎグラム」を「グラムのｎ倍」と言えること
2.「m倍とｎ倍の合成を (ｍ × ｎ) 倍と書く」が「×」の文法とされること
3.「ｍと掛けてｎになる数をｎ ÷ ｍと書く」が「÷」の文法とされること

現行はつぎのようになっている：

1.「ｎグラム」は「１グラムのｎ倍」
「１グラムは１グラム」(グラムを単独にできない)
2. ＜ｍに抽象される量＞をｎ倍した量の抽象が，ｍ × ｎ
3. ＜ｎに抽象される量＞をｍ等分した量の抽象が，ｎ ÷ ｍ
あるいは，＜ｍに抽象される量＞に対する＜ｎに抽象される量＞の割合が，ｎ ÷ ｍ

現行は「数は量の抽象」の立場に立っているため，量計算の指導ではひどく没論理な論法をつくりださねばならない。しかし，ずっとこの軌道でやってきているので，いまからこれを改めるというのも至難である。

10. おわりに

「１と見る」の問題は，数学で語ることが必須である。数学を用いないと,「１と見る」の意味・構造が見えてこない。没論理の思考に嵌り，ごまかされてしまう。「１と見る」の数学は初等的ではないが，それは仕方がない。実際，むしろ問題なのは，おおもとになっている数学の押さえという作業をとばして数学教育の研究に入ってしまうことである。

参考文献

[1] 宮下英明 (2008) :「わり算」「割合」の概念整理 , 日本数学教育学会誌 算数教育 , 2008, vol. 90, no.4, pp.67-70.
[2] 宮下英明 (2007) :「数とは何か？」への答え , http://m.iwa.hokkyodai.ac.jp/meb/number/number_what/