算数科“数と計算”領域教材研究

——分数（1）：“分数”の意味；現行の分数指導体系——

宮 下 英 明

“Numbers and Calculation” in Elementary School Mathematics

——Fractional Number (1) :Meaning; Current Subject Matter——

Hideaki MIYASHITA

目 次

1 “分数”の意味

1.1 数の〈使用〉

1.1.1 〈使用〉対〈意識・思念〉

ひとは，数を量（大きさ）としてイメージしがちである。“８”や“$\frac{2}{3}$”は何がしかの大きさであるとか，あるいは，それが表現しているような大きさがあるというように考える。

しかし翻って，その〈大きさ〉は何かと問われれば，返答に窮してしまう。実際，この問いには答えられない。それは問題が難しいからではなく，答えがはじめから無いからである——この問題は擬似問題である(注)。困難は自らが招いたのである。即ち，数を量のように考えることによって。

実際のところ，数を量のように考える人も，実生活においては数をそのような意味では使っていないのである。われわれは，“りんごが８個”とか，“８ｍのひも”というように“８”

昭和62年４月30日受理

を用い，“今月は10日間家をあけたからガスの使用量は先月分の$\frac{2}{3}$程になっているはずだ”のように“$\frac{2}{3}$”を用いる。このとき“8”，“$\frac{2}{3}$”は量ではない。また，会費が一人3500円のとき16人で56000円になることを3500×16で計算するとき，数“3500”が単独に現れているが，それは3500という抽象的な大きさの表現ではないし，また3500円という具体的な大きさの抽象でもない。

“8の大きさ”，“$\frac{2}{3}$の大きさ”というようにひとが考えるときの数を，“量としての数”と以下称することにする。この“量としての数”は数の実生活的な使用の中には出てこない。これは，ひとが数学をしたり，哲学（形而上学）をしたり，また特に算数科教材研究をしたりするときに，現われる。

数を量として扱う——量としての数の理論を展開する——ことはできる。しかしあくまでも“できる”というそれだけのことであり，これによって《数＝量》が示されたことになるわけではない。実際，数を量としても扱えるということは，数が量の表現に機能していることの結果に他ならない（後述）。

繰り返すが，数が日常的に使われている限りでは，それは量ではない。数が量になるのは，〈使用〉という文脈を離れてそれが独自に思念されるとき（即ち，哲学されるとき）である。

数を量のようにイメージしてしまう傾向は，〈もの〉的な考え方の傾向と多分に重なるように思われる。

われわれには，何故か，概念（ことば）に〈もの〉の対応を考えてしまう傾向——体質のようなもの——がある。この哲学はつねに自らの実践（実生活）によって裏切られている筈なのであるが，ひとは実践（実生活）にではなく哲学の方についてしまう。

この道をとったつけは，色々なところにまわって来る。——“数＝量”の場合では，このとき根本問題になる“数の〈大きさ〉”については何も答えられないということに，つけがまわって来るというわけである。

（註）　この問題は結局“1の大きさは何か”の問題に帰するが，“1の大きさ（量1）？”は，そもそも答えをもつ問題ではないのである（§1.3)。

1.1.2　倍としての数と，量としての数

数の教材研究に際しては，われわれは実生活的に使用されている数と，哲学されている数とを，きっちり区別しておく必要がある。但し，言うまでもなく，この区別を直接指導の内容に持ち込むという意味ではなく，指導する側がこのことを確認していなければならないという意味において。

実生活的な使用の中にある数は，単位として考えている量の“いくつ分”，そしてこの概念の拡張としての，〈倍〉である。これに対し，哲学された数としての〈量〉としての数がある。

倍としての数は，数学的には，1次元線型空間としての量（§1.2）の係数ということになり，その構造は“体（たい）”である。ところで“線型空間”の教科書では，線型空間の概念の導入のすぐ後に必ず“体はそれ自身を係数体とする線型空間である”という注釈が述べられるが，簡単に読み過ごされがちなこの注釈が，量としての数の理由のすべてになっている。即ち，量としての数とは，体の構造をもつ倍としての数を線型空間に読みかえたものなのである[註1]。

数については，“数は長さ，重さのような具体的な量の抽象として機能させられる（使用される）”と言うことは正しいが，“長さ，重さのような具体的な量の抽象として数が出てくる”と言うのは，正しくない。具体的な量の抽象としての数は，あくまでも結果である。“量の数への抽象”は無媒介のものではなく，倍としての数を経由してなされる。

例えば，量としての2。これは量1に対する関係において決まっている——即ち，1の2倍の量ということで。一方，2倍は量1に対する量2の関係として定義されるものではない。（そうだとしたら，2倍と量2は相互にもたれあって，終に確定されることがない。——循環論法！）2倍は，具体的な量における関係概念

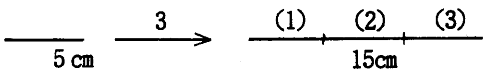
として出てくる。そしてこの2倍の概念を用いて，量としての2が量1に対して導入できることになる。

最後に，倍としての数と量としての数の違いは使われ方の違いのみである(註2)ということを強調しておく。そして，“使われ方”ということでは，倍としての数と量としての数の両方が数学科の内容になっている。即ち，両者を明示的に区別する指導が現行のものにあるわけではないが，子どもは色々な学習場面を通して，二つの異なった使い方を（無意識的にではあれ）会得していく——文法を意識せずに言語を会得する具合に。

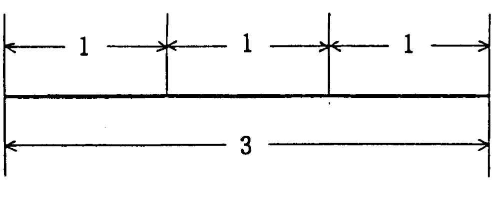
（註1）　例えば，有理数全体ℚは，それの加法＋と乗法×に関して体になる——単に，＋と×が，結合的，可換，分配的といったわれわれのよく知っている代数的規則を満たしているという意味において。

いま，有理数×有理数を有理数の有理数倍のように読みかえてみる。即ち，×を，ℚの内算法（二項演算）ではなく（倍）作用として解釈する。このとき，一方の有理数が“係数”の身分で考えられていることになる。そして＋と倍の意味の×に関して，ℚは（それ自身を係数体として伴う）線型空間になる——＋と×に関する先に同じ代数的規則の意味において。

（註2）　例えば，“3人”と言うときの“3”や図式



の中の二つの“3”は倍としての数で，図式



の中の“3”は量としての数である。

1.1.3　“整数，分数，小数”

算数科では，“数”として“整数”，“分数”，“小数”の三つが出てくる。これらはすべて実生活に現われるものであるが，その〈使用〉の形はそれぞれ異なっている。

数を〈もの〉＝存在として捉えてしまうとき，ひとは整数，分数，小数を，数の異なる面ないし現象のように考えやすい。——例えば，“整数は分数（小数）の特別なものである”，“分数と小数の別は，有理数という一つの存在の表現の別に過ぎない”，といつた具合に。しかし，“実生活的な使用の中の数”ということで〈使用〉を第一に考えるときには，整数，分数，小数はそれぞれ独自なものとして区別されるということになる。そして　数は，整数，分数，小数を構成員として含むような“家族”の概念になる。

数を存在（実体）のように考えるとき，ひとは“この存在は何か？”の問いを自ら背負い込むことになり，そしてその答えに窮する羽目に陥る。

困難は自分から招いたのである。しかしひとは，この種の哲学的な自家中毒に陥りやすい。これに対する解毒剤は，数の実生活的な使用がどのようなものになっているかを見ることである。そしてわれわれは，数がどのようなものであるかはこの〈使用〉で全て決められている，と考えるべきである。なぜなら，〈使用〉に遡れないようなものは，数の教材研究の上でのわれわれの関心の対象になるものではないから。

整数，分数，小数を一つのものと見る見方は確かに成り立つ。しかしそれは，これらが数という或る存在の異なる面だからではない。これらは出会うのであり，そして出会う理由はそれぞれの〈使用〉の構造にある。

1.2　量

1.2.1　形式としての量

“量とは何か？”と問われて答えにつまっても，われわれは，量としてどのようなものがあるかを言うことはできる。長さ，重さ，時刻，

時間，温度，速度，硬度，数(かず)，等々。では，どうしてこれらは“量”なのか。これらを“量”と呼ぶというのは，一体どういうことなのか。

これらが或る意味で同じものと見れる，仲間と見なせる，ということが先ずある。そしてこれらをひとしく“量”と呼ぶことで，間接的にこれらは仲間であるということを主張している。

では，“量”と呼ばれている種々のものは，どのような見方によって，互いに同じ仲間のものということにされているのか。例えば長さと時間は，現象としては全く別物に見える。

“量”という仲間をつくっている規準は，〈形式〉である。即ち，同じ形式をもつものということで，種々の量は仲間（“量”）と見なされている。

したがって，“量とは何か？”という問いに対して，“それは一つの形式である”という答え方が可能になる。では，それはどのような形式のことか。

しかしここで，“量”の形式は単一ではないということに先ず注意しておかねばならない。実際，例えば時間，硬度，数(かず）は互いに異なる形式のものである。——時間同士の和を考えるが，硬度に和の概念はない；時間は稠密に考えられているが，数(かず）は離散である；等々。

“量”に異なる形式のものがあるということは，異なる“量”があるということに他ならない。そこで，異なる“量”がどうしてまた同じ仲間（“量”）として見られるようになるのか，その規準は何か，という問題も出てくる。しかしこの問題には立ち入らないことにしよう。われわれは，時刻がそれの例になるような“量”（形式）——それも，代数的な形式——をもっぱら考えていくことにする。なぜ時刻なのか。算数科に出て来る“量”全ての代表（同型のもの）として考えていけるからである。

1.2.2 量（＝形式）の記述

時刻という量をわれわれは日常どのような文脈の中で使用しているか。形式——但し，代数的形式——ということだけに限定して考えるならば，

“2時から3時間経てば5時になる”

あるいは

“2時と5時の間には3時間の経過がある”

というのが，唯一のものになっている。時刻には時間が付随しているわけであり，実際，時刻は単独では使い物にならない。

時間の方はどうか。それの日常的な使用は，どのような形式のものになっているのか。上に述べた時刻に対するものを除いては，つぎの二つになる：

“2時間（経過）と3時間（経過）で5時間（経過）”，

“6時間(経過）の$\frac{2}{3}$(倍）で4時間(経過）”

そして後者の形で，時間には倍（時間に関する）が付随している。

そこでさらに，倍の日常的な使用の形式ということになるが，時間に対するところの先のものを除けば，これは

“時間xの2倍とxの3倍でxの5倍”

“時間xを2倍して3倍はxの6倍”，

の二つになる。この倍にはさらに他の何かが付随してあるであろうか。これに付随するものを考えることは，理論的には可能である。しかし，時刻の日常的な使用に関しては，この段階で止めて十分である。即ち，時刻，時間，倍（時間に関する）の三つに関するこれまでに示した形式で，時刻の日常的な使用の代数的な部分は全て説明可能となる。

ここで，これらの形式を記号を用いて記述してみることにする。

倍（時間に関する）から取りかかることにする。先ず，倍全体の集合というものを考えて，これを$\mathscr{N}$で表すことにする。倍については，倍の和——“xの2倍とxの3倍でxの5倍”——と倍の合成——“2倍して3倍すると6倍”——が考えられている。いまこれらをそれぞれ，＋と×で表わすことにすると，集合$\mathscr{N}$において二つの算法＋，×が定義されたことになる。

算法の＋と×に関しては以下のことが成立し

ている（われわれが当たり前のこととしていつも使っていることである）。

先ず，＋について，

1）　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$　（可換），

2）　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$　（結合的），

3）すべての$\mathscr{N}$の元αに対して$\alpha+0=\alpha$であるような$\mathscr{N}$の元0（零元）が存在する，

4）$\mathscr{N}$の各元αに対し，$\alpha+\beta=0$となるような$\mathscr{N}$の元βが存在する——これをαの対称元といい，$-\alpha$と書く．

以上のことを指して，$\mathscr{N}$は＋に関して可換群をなすと言う（2），3），4）に対して“群”，1）に対して“可換”）。

×については，

5）　$\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$　（可換），

6）　$(\alpha\times\beta)\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$　（結合的），

7）すべての$\mathscr{N}$の元αに対して$\alpha\times 1=\alpha$であるような$\mathscr{N}$の元1（単位元）が存在する，

8）0と異なる$\mathscr{N}$の各元αに対し，$\alpha\times\beta=1$となるような$\mathscr{N}$の元βが存在する——これをαの逆元といい，α^{-1}と書く．

さらに＋と×の間には，

9）　$(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma$　（分配的）

が成立している。そして以上のすべてのことを指して，$\mathscr{N}$は＋と×に関して体（たい）をなすと言う。したがって，倍の形式については，“システム（$\mathscr{N}$，＋，×）は体をなす”と言えば，すべてを言い尽くしたことになる。

つぎは，時間である。時間全体の集合というものを考えて，これをDで表わすことにする。

Dにおいては，先ず，時間同士の和として加法＋が定義される。そしてDはこの算法に関して可換群をなす（“システム（D，＋）は可換群”）。

ところで，時間に対しては，和のほかに，倍が考えられている。いま，時間$\boldsymbol{x}$のα倍を$\boldsymbol{x}_{\times}\alpha$で表わすことにする（$_{\times}$は，下付けの小さい$_{\times}$のつもりで書いている——倍に関する乗法×と区別するためである）。これは，Dの元に対する$\mathscr{N}$の元の作用$_{\times}$を定義したことになる。

この作用$_{\times}$については，

$$(\boldsymbol{x}_{\times}\alpha)_{\times}\beta=\boldsymbol{x}_{\times}(\alpha\times\beta)$$

$$\boldsymbol{x}_{\times}(\alpha+\beta)=\boldsymbol{x}_{\times}\alpha+\boldsymbol{x}_{\times}\beta$$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})_{\times}\alpha=\boldsymbol{x}_{\times}\alpha+\boldsymbol{y}_{\times}\alpha$$

$$\boldsymbol{x}_{\times}1=\boldsymbol{x}$$

が成立している。（Dの元を小文字のローマ字で，$\mathscr{N}$の元をギリシャ文字で表わしている。）これも，われわれが当たり前のこととしていつも使っていることである。

さてここで，作用$_{\times}$を，システム（D，＋）と（$\mathscr{N}$，＋，×）をつなぐものとして見ることにする。このときわれわれは，さらに大きなシステム（（D，＋），（$\mathscr{N}$，＋，×），$_{\times}$）を考えていることになる。そして実は，このシステムは数学の一つの概念になつている。“ベクトル空間”（あるいは“線型空間”）というのがそれである。

詳しく言うと，システム（（D，＋），（$\mathscr{N}$，＋，×），$_{\times}$）については，“Dは体$\mathscr{N}$上のベクトル空間である”とか，“Dは$\mathscr{N}$を係数体として伴うベクトル空間である”というような言い回しがされる。（“係数”とは，$\boldsymbol{x}_{\times}\alpha$の$\alpha$を$\boldsymbol{x}$の係数と読む場合の“係数”である。）

さて，時間のベクトル空間には，つぎのような特別な性質がある。即ち，0でない時間$\boldsymbol{u}$を勝手に決めて，任意の時間$\boldsymbol{x}$を，この$\boldsymbol{u}$を倍した形で表わすことができるということである。（現実に表わすことができるかどうかの問題ではなく，ともかくそのようなものとしてわれわれは時間を考えている。）これは〈測定〉を成り立たせている原理でもあるわけであるが，この性質を指して，時間のベクトル空間は，“1次元”であると言う。

ちなみに，平面上の移動ベクトルは，二つのベクトルを用いれば表現できて，しかも一つではできないという意味で，“2次元”ということになる。（一般の“$\boldsymbol{n}$次元”も，ここから類推される。）

最後に時刻であるが，先ず，時刻全体の集合というものを考えてこれをQで表わす。

Ｑの中には内算法（Ｑの二元に対しＱの一元を対応させるもの）はない。Ｑについては，Ｑの元に対するＤの元の作用$_{+}$があるのみである。それは，時刻$\boldsymbol{X}$と時間（ベクルトとして）$\boldsymbol{x}$に対し，$\boldsymbol{X}_{+}\boldsymbol{x}$を，$\boldsymbol{X}$からの経過時間が$\boldsymbol{x}$であるところの時刻として読むところのものである。（$_{+}$は下付けの小さい＋である——時間に関する加法＋と区別するためである。）

この作用$_{+}$については，つぎのことが成立している：

$$(\boldsymbol{X}_{+}\boldsymbol{x})_{+}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}_{+}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),$$
$$\boldsymbol{X}_{+}0=\boldsymbol{X}.$$

そしてこの関係によってシステム（Q，((D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$)，$_{+}$）が考えられることになる。

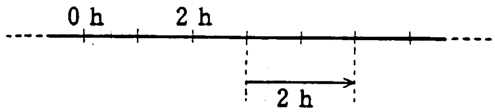
そしてこれに対しては，“アフィン空間”という概念が数学にある。即ち，“Qはベクトル空間（(D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$）を随伴するアフィン空間である”といった言い回しがされる。（このとき，Ｄの元は“併進（平行移動）”と読まれる。即ち，$\boldsymbol{X}_{+}\boldsymbol{x}$を，$\boldsymbol{X}$に平行移動$\boldsymbol{x}$を及ぼすこと，ないしその結果というように，読むわけである。）

一般に，随伴するベクトル空間が$\boldsymbol{n}$次元のとき，アフィン空間は$\boldsymbol{n}$次元であると言われる。ところでいまの場合は，随伴ベクルト空間は時間のベクルト空間で，それは１次元であるから，時刻のアフィン空間は１次元ということになる。

“量”（＝形式）に関する議論はこれで終わりである。即ち，時刻の形式の（Q，((D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$)，$_{+}$）が“量”（＝形式）としてここで結論されるところのものである。この形式（代数的形式）でもって考えられているものを“量”と呼ぶことにする，というわけである。

この場合，時間（(D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$）はつぎのように解釈することで，量（Q，((D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$)，$_{+}$）になる。即ち，ＱとしてＤ自身を，そして$_{+}$としてＤの加法＋を，とる。

この手続きは決して単に形式的ないし便宜的といったものではない。意識には上りにくいのであるが，時間のこの二つの身分は現実的なものである。それはつぎの図式によって端的に示すことができる：



ここには二つの“２時間(ｈ)”がある。直線上の点として表わした２時間はＱの元で，ベクトルとして表わした２時間はＤの元である。

算数科で取り上げられる“量”には，長さ，面積，かさ，体積，時刻・時間，重さ，角，速さがあるが，これらはすべて（Q，((D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$)，$_{+}$）の形式でくくることのできる量である。したがって，算数の中で考える限りでは，“量”をこの形式で定義してしまって差し支えない。

なお，この形式では，数（かず）——いわゆる“離散量”——はとらえることができない。しかし，$\mathscr{N}$として$\mathbb{Q}$（有理数全体の集合）をとり，$_{\times}$はいつも定義されるとは限らないという留保をつけて$_{\times}$が定義される条件を明示するならば，（Q，((D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$)，$_{+}$）は数（かず）の形式になる。（定義される・されないとはつぎのようなことである：６人の$\frac{2}{3}$は定義されるが，７人の$\frac{2}{3}$は定義されない。）

1.2.3　数

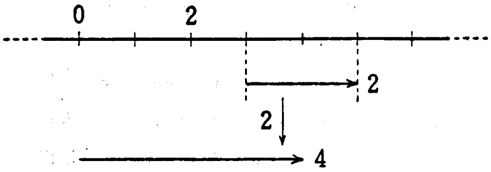
量に対するものとしての数の第一義は，量の形式（Q，((D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$)，$_{+}$）の中の（$\mathscr{N}$，＋，×）である。即ち，量に関する倍（“係数”）というのが，数の本来の身分である。

ところが数は，つぎに量としても考えることができる。即ち，Ｑとして$\mathscr{N}$自身を，（D，＋）として（$\mathscr{N}$，＋）を，$_{\times}$として$\mathscr{N}$の×を，$_{+}$として$\mathscr{N}$の＋を，それぞれとれば，（Q，((D，＋)，($\mathscr{N}$，＋，×)，$_{\times}$)，$_{+}$）は量になっている。

この量としての数は，“量の普遍モデル”として用いることができる。そして<u>このときに</u>

は，“数は量の抽象”，“数＝普遍量”といった言い回しを用いてよい。

数直線の中に，



のように三つの身分の２を見てとることができるが，これらは上から順にQ，D，$\mathcal{N}$の元の身分のものである。

1.3　序列，自然数，数(かず)

1.3.1　序列，自然数

算数科における“整数”は，自然数である。

自然数１，２，３，‥‥の実生活的使用には，順番をつけるとか，識別の記号として用いるとか，計数とかがある。しかし，根本は一つであって，それは序列化の形式としての使用である。即ち，“１，２，３，‥‥”とは，“はじめ，はじめのそのつぎ，はじめのそのつぎのそのつぎ，‥‥”のことに他ならない。

例えば，計数。このときの“いち，に，さん，‥‥”は確かに“はじめ，はじめのそのつぎ，はじめのそのつぎのそのつぎ，‥‥”の意味で使われている。ここで示されているものは序列であり，“数（かず）”（という量）は結果に過ぎない。“いち，に，さん，‥‥”で数（かず）が求められるのは，序列化の一つの応用としてである。

例えば，りんごがいくつかあって，これらの一個一個に名を与えるように“いち”，“に”，“さん”，‥‥を指定していったとき，“はち”でこれが終わったとする。このとき，“りんごは八個ある”と言ってよい。しかし，こう言ってよいのは，“はち”が単なる最後ではなく，序列化の最後だからである。そして実際，“いち，に，さん，‥‥，はち”は，何よりも先ず，この序列化をつくることに使用されている。

1.3.2　単位

一つの集合においてそれの要素の数（かず）が数えられるとき，数えられるのは，単位の現出の繰り返しの回数である。個々の要素には，単位の現出の意味しかない。

りんごが“いち，に，‥‥”と数えられているときには，互いに異なる存在としてのりんごの現出が捉えられているのではなく，単一のものとしての単位の反復的現出が専ら捉えられているのである。一つ目と二つ目のりんごは別のりんごであるが，捉えられているのは，単位の２回の現出である。単位は，単一のものである。“りんごが８つ”とは，単位の８回の現出を意味し，８つの単位があるということではない。

1.4　量の整数比——分数

1.4.1　整数比

“分数”とは何か。

分数については，例えば，つぎのような意識・印象が持たれる：

$$\text{“}\tfrac{2}{3}\text{倍”} \longrightarrow \tfrac{2}{3}\text{：倍}$$
$$\text{“}\tfrac{2}{3}\,\mathrm{m}\text{”} \longrightarrow \tfrac{2}{3}\text{：量}$$
$$\text{“}\tfrac{2}{3}\text{”} \longrightarrow \tfrac{2}{3}\text{：数}$$

特に，第二の意識・印象からは，(それに実体がどのように伴うのかはともかく）“量の分数”のことばが生じたりする。しかし，分数に対してのこの意識・印象は，端的に誤りである。

“分数”の意味を遡行すると，“量”に行きあたる。分数の意味遡行は〈外部〉としての量につきあたる。そしてこのとき，分数は量の整数比として規定されるものになる(註1)。また実際，分数の諸々の形式・意味は，この《分数＝整数比》の規定から論理的に導かれる。そしてこのときには，分数に対しさらに，〈倍〉，〈量〉，そして代数的構造（有理数体）(註2)という三つの意味（身分）が考えられることになる。

（註１）いま“分数”の意味遡行の出発点に，“分数”の最も抽象的な形態である代数的構造と

しての分数を考えてみる。代数的構造としての分数は一つに有理数体であり，また一つに，この有理数体を係数体として伴う（1次元）線型空間である。

ここで，この二つの構造の根拠を意味遡行という形で問うてみる。第二の構造は量の代数的構造であり，第一の構造は量の比（倍）の代数的構造である。

つぎに，この二つの構造は並列的なものか，あるいは一方が他方を導くようなものとしてあるのか，と問うてみる。量としての分数の概念はそれの係数としての有理数の概念を随伴している。したがって，“量の比（倍）としての分数から量としての分数が導かれる”という方で考える他ない。そして実際，この方で解釈が立つのである。（§1.2，（註1））

（註2）分数計算は，比（倍）計算として起こる。しかし，専らこれの形式のみに目を向けるとき，有理数とその算法の概念（“有理数体”）がこれから起こることになる。

因に，（分）数計算を，具体的な量計算を形式化したときに出てくるものと考えるのは，誤りである——実際それは，倒錯した見方である。事実は，量計算に数計算＝倍計算が応用される，ということである。

1.4.2　“割合分数・量の分数”について

“比（倍）としての分数”における“比”は“割合”と読み換えることができる。そして既存の概念に“割合分数”というのがある。そこで，比（倍）としての分数は，ことばの上から，“割合分数”に同じものと予断される恐れがある。

同様の問題が，量としての分数についても持ち上がる。即ち，既存の概念に“量の分数”というのがあり，量としての分数はこれに同じものと予断される恐れがある。

比（倍）としての分数は“割合分数”ではなく，量としての分数は“量の分数”ではない。そもそも，“割合分数”，“量の分数”の見方は共に誤りなのである。即ち，“割合分数”——“1に対する$\frac{2}{3}$”——では，量としての分数がこれの事実上の身分でありながら，〈割合〉であると受け取られる。そして，“量の分数”——“$\frac{2}{3}$m，$\frac{2}{3}l$，$\frac{2}{3}$kg，‥‥の抽象としての$\frac{2}{3}$”——の方は，論理（“$\frac{2}{3}$m，$\frac{2}{3}l$，$\frac{2}{3}$kg，‥‥から$\frac{2}{3}$が抽象される”という）そのものが嘘である。

比（倍）としての$\frac{2}{3}$は，量xに対し“xの$\frac{2}{3}$”という形で用いられるものである（“のつきの分数”）。ここで，“xの$\frac{2}{3}$”の定義は，“3倍してxになるような量uの2倍の量”である。また，量としての$\frac{2}{3}$は，“量としての1の$\frac{2}{3}$の量”と定義されるものである。このとき“1の$\frac{2}{3}$である$\frac{2}{3}$”の言い回しが可能になるが，この中のはじめの“$\frac{2}{3}$”は比（倍）としての分数であり，後の“$\frac{2}{3}$”は量としての分数である。

“割合分数”と称される“1に対する$\frac{2}{3}$”の言い回しの中の$\frac{2}{3}$は，量としての分数である。また，“$\frac{2}{3}$m，$\frac{2}{3}l$，$\frac{2}{3}$kg，‥‥の抽象が$\frac{2}{3}$”の言い方は，あくまでも〈表現〉“$\frac{2}{3}$m，$\frac{2}{3}l$，$\frac{2}{3}$kg，‥‥”に導かれて出てきたわけであるが，この表現の中の“$\frac{2}{3}$”そのものからは量としての$\frac{2}{3}$は決して導かれない。しかもこれらの“$\frac{2}{3}$”は，比（倍）としての分数である。

所謂“割合論争”における《“割合分数”vs“量の分数”》の図式は，倒錯した概念同士の対立であり，端的に無意味である。“比（倍）としての分数”と“量としての分数”の間の関係は，このような対立の図式に現われるようなものではない。“比（倍）としての分数”と“量としての分数”は，前者から後者が導出されるという論理的関係にある。

1.4.3　量計算と分数

量計算における分数の身分は，〈倍〉であって，〈量〉ではない。

式の要素である分数の身分として，式変形の中で一貫して考えていけるものは，〈倍〉である。即ち，計算過程に現われる数はすべて，結果として予定されている量に関する倍の身分で捉えることができる。例えば，毎時40kmで3時間の走行距離を40×3で計算するとき，40，3はともに距離に関する倍として計算されている。

2　現行の分数指導体系

今日，分数はどのような概念として指導されているのか。それは，見掛け上——しかし同時にまた，意識されているところでは——“量”として指導される。即ち，単位量１の下位単位量の意味で単位分数が導入され，そしてこの単位分数の整数倍として一般の分数が導入される。

“単位がいくつといくつ”の意味に直結する“比（倍）としての分数”は，現行の分数指導では出てこない。——“倍”のことばが分数とともに出てくるのは，同種の量の割り算の文脈で，この割り算の商という形においてである（第６学年)。

また，“比”の単元に出てくる“比の値”としての分数も，ここで言う比（倍）としての分数ではない。“比の値”は，“量の数値”と同じ意味で，“比”という関係にあてがわれた数値である。量に数値をあてがう意義は，その数値の上で量が比較できるとか，量が計算にのるということであるが，比＝関係に“比の値”という数値をあてがう意議もこれと全く同じである。比（倍）としての分数は，比の数値ではない。それは，比という〈関係〉そのものであり，あるいはこれを〈関数〉に読み直したところのものである。

しかし勿論，比（倍）としての分数は教材の中にはある。“出てこない”とは“隠蔽されている”ということである。実際それは，退け得るものではない。

わたしの考えでは，分数を原理的に“量”と捉えることも，教育上の方便として“量”として示すことも，ともに誤りである。前者は原理的に誤っているということにおいて，そして後者は，教育的方便になっていないものを——実際，分数は別モノとして教授されるのだから——教育的方便と思い込むことにおいて。

2.1　分数の導入

現行の分数指導の体系では，先ず，“n等分してm個とる”操作としての分数が導入される。これの数学的な身分は〈関数・作用〉である。

つぎに，１m，１kgといった単位量に対し操作の分数を適用させるという形で，$\frac{2}{3}$m，$\frac{2}{3}$kgのような単位つきの分数が導入される。そしてつぎに，抽象量１を非明示的に与え，やはり操作としての分数を媒介することで，量としての分数を導入する。

現行の指導の下では，分数は“量の抽象”になる。例えば$\frac{2}{3}$は，抽象量１に対し“操作$\frac{2}{3}$”を及ぼした結果としての量である。特に，量としての$\frac{2}{3}$の概念は，操作$\frac{2}{3}$の概念に依拠している。しかし，〈分数＝操作＝関数・作用〉は出発点として十分ではない。これの前に〈分数＝量の整数比＝関係〉が要る。現行の分数の導入では，〈分数＝関数・作用〉以前の〈分数＝量の整数比＝関係〉が欠落している。

“三等分して二つとる”操作（関数・作用）としての$\frac{2}{3}$を考えてみよう。われわれは何故“三等分して二つとる”という操作をするのか。あるいは，どのような意味で，この操作を考えるに至るのか。

現前の対象（量）にこの操作を施そうとするとき，われわれは既にその結果を予定している。即ち，はじめに，現前する量から或る量を導くという目的があり，そしてこの予定された量を導くためのものとして，“三等分して二つをとる”操作が<u>従う</u>。つまり，先後の関係としては，現前する量に対する或る予定された量の関係が先にあって，“三等分して二つとる”操作がこの予定された量を導くものとして後に来る。

さて，この《現前する量に対する予定された量の関係》——〈関数〉としての分数以前にあるもの——は，“二量の整数比”として形式化される。

はじめに述べたように，現行の分数指導体系はここから始まるようにはなっていない。

〈分数＝整数比〉から出発して，分数の種々の現象を論理的に位置づけていくような体系的な分数指導法も考えられるわけであるが，現行の分数指導は，このやり方をとらない。そこでは，“操作分数”ないし“単位つき分数”の形

に隠蔽されている比（倍）としての分数と，量としての分数が，渾然と扱われる。即ち，操作としての分数と量としての分数の二つを混ぜ合わせる形で分数計算に意味を与え(註)，これを指導していくという具合である。

このつけは，分数計算の意味づけのところに回ってくる。即ち，分数計算——数および演算記号——は，形が異なれば違った解釈が与えられるという具合で，単一の意味で説明されることがない。

分数計算の意味は本来単一である。それの応用に色々な場面があり，別様の解釈が可能になるということに過ぎない。

（註）式“$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$”は現行では実質“$\frac{3}{4}$の$\frac{3}{4}$倍”の意味で指導されているが，このときには，前の“$\frac{3}{4}$”は量として数であり，後ろの“$\frac{3}{4}$”は倍としての数である。

2.2 分数の加法

分数の加法の意味は，量の比（倍）の加法である。それを量としての分数の加法として考えようとしても，実行されるときにはそれは量の比（倍）の加法になっている。

数の加法は，量の比（倍）の加法ということでは，量（ベクルトとしての）の加法から導かれる。即ち，比（倍）ξ，η，ζに関する関係：$\xi+\eta=\zeta$は，一つの量$\boldsymbol{x}\neq 0$において成立するところの——そして結局任意の量$\boldsymbol{x}$に対して成立するところの——事実関係：

$$\boldsymbol{x}\times\xi+\boldsymbol{x}\times\eta=\boldsymbol{x}\times\zeta$$

に基づいて定義されるところのものである。

分数の加法に対する現行の指導法は，$\frac{3}{4}$m＋$\frac{2}{5}$m，$\frac{3}{4}$kg＋$\frac{2}{5}$kg等の形から入って，これより$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$に移行するというものである。この移行の意味は，倍の和への帰着ということである。しかし，現行の指導法の下では，“量の和$\frac{3}{4}$m＋$\frac{2}{5}$m，$\frac{3}{4}$kg＋$\frac{2}{5}$kgの抽象としての$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$”のような捉え方が出てきてしまう。

この捉え方は，つぎの意味においては正しい。即ち，量（体系）としての長さと量としての数の同型（対応）として，1mに1を対応させるものをとる；この同型の下に$\frac{3}{4}$m＋$\frac{2}{5}$mには$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$が対応する。また，量（体系）としての重さと量としての数の同型として1kgに1を対応させるものをとる；この同型の下に$\frac{3}{4}$kg＋$\frac{2}{5}$kgには$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$が対応する。

しかし，抽象は，抽象以上の意味は持たない。即ち，この抽象は，$\frac{3}{4}$m＋$\frac{2}{5}$mや$\frac{3}{4}$kg＋$\frac{2}{5}$kgの計算には全く効かない。実際，このときの$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$は，$\frac{3}{4}$m＋$\frac{2}{5}$m，$\frac{3}{4}$kg＋$\frac{2}{5}$kgの横に並んで終わりである。

計算されるところの$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$は，いまの“$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$”ではなく，

$\frac{3}{4}$m＋$\frac{2}{5}$m＝1mの（$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$）
$\frac{3}{4}$kg＋$\frac{2}{5}$kg＝1kgの（$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$）
$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=1$の（$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$）

のようにして導出される倍の和の“$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$”である。

分数の和は，比（倍）としての分数の和である。しかし分数の和のこの根本義が，現行では指導されることがないのである。

2.3 分数の乗法

2.3.1 “特殊から一般”

量計算を文脈とする分数の積の意味は，その文脈の多様性にも拘らずただ一つである。即ち，量の倍の合成である。

分数に対する伝統的な意味規定（“操作分数”，“割合分数”，“量の分数”）は，実際のところ，分数の現象する文脈の分類である。そしてこのことは，分数の積の意味規定の場合にも，(例えば，“量×量”のように) 見受けられる。しかし，分数の積の文脈である量計算は，ただ一種の量に関する倍の合成へと還元される。そしてこの倍の合成が，分数の積として計算されるのである。

現行の指導は，このような立場をとらない。そこでは，分数の乗法の指導のゴールが，見掛け上，積の公式：

$$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}=\frac{n\times q}{m\times p}$$

になっており，そしてつぎのような階段を踏んでこれに到達することとされている：

$$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}$$
$$\left[=\frac{n}{m}\times(p^{-1}\times q)\right] \quad (1)$$
$$=\left(\frac{n}{m}\div p\right)\times q \quad (2)$$
$$=\frac{n}{m\times p}\times q \quad (3)$$
$$=\frac{n\times q}{m\times p} \quad (4)$$

ここで $\left[=\frac{n}{m}\times(p^{-1}\times q)\right]$（1）は，$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}$ の解釈である。但し p^{-1} は，p 倍の逆倍（“p 等分”と読むことを指導されているところの）を表わす。

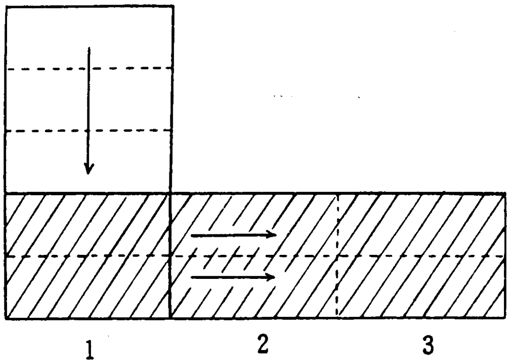
この指導で〈意味〉が入ってくるのは，$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}$ の立式とこれの見方の（1），そしてこの見方からの立式の（2）である。これ以降は，実質的に，既習の式変形の適用になる。即ち，（3）は分数÷整数の式変形，（4）は分数×整数の式変形。

現行の分数指導の系統は，このように，分数×整数，分数÷整数の計算を，分数×分数の計算ができるための素地として予め指導するという形のものになっている。そこでつぎに，分数×整数，分数÷整数の指導がどのように行われることになっているかを見ていく。

2.3.2　分数×整数

分数×整数は，量の倍（量×倍）の意味で導入される。例えば，$\frac{2}{5}\times 3$ は，“$\frac{2}{5}\,l$ の3つ分は？”のような問題の立式である。但し，倍はあからさまにだすのではなく，例えば“3つ分”は，“ビン3本”，“3カップ”のように実体化された形で表現されるのが普通である。

“$\frac{2}{5}\,l$ の3つ分”は，つぎのような面分図を用いて説明される：



そしてこれに依って，式変形

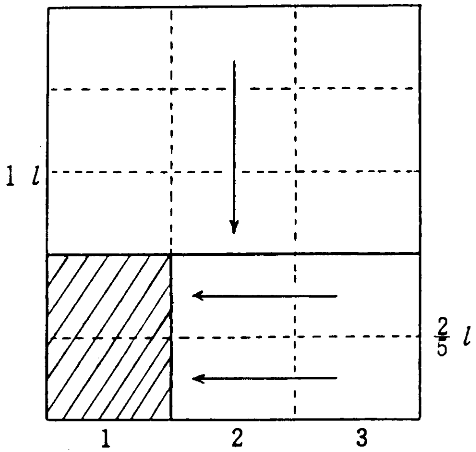
$$\frac{2}{5}\times 3=\left(\frac{1}{5}\times 2\right)\times 3$$
$$=\frac{1}{5}\times(2\times 3)=\frac{2\times 3}{5}$$

を納得させる。

2.3.3　分数÷整数

分数÷整数は，量の等分の意味で導入される。例えば $\frac{2}{5}\div 3$ は，“$\frac{2}{5}\,l$ の3等分の1つ分は？のような問題の立式である。

“$\frac{2}{5}\,l$ の3等分の1つ分”はつぎのような面分図を用いて説明される：



そしてこれに依って，式変形

$$\frac{2}{5}\div 3=\frac{1}{5\times 3}\times 2=\frac{2}{5\times 3}$$

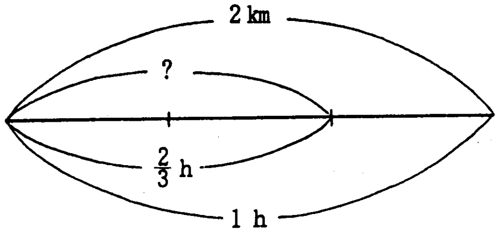
を納得させる。

2.3.4　整数×分数

整数×分数は，見かけ上，量×量の意味で——即ち，倍×倍や量×倍ではなく——立式される。例えば，$2\times\frac{2}{3}$ を立式させるのに用いる問題は，“2㎞の $\frac{2}{3}$ は？”ではなく，“1時間に2㎞の距離を進むとき $\frac{2}{3}$ 時間では？”のような問題である。

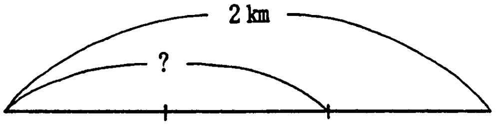
この問題は比例関係の問題[注1]であるが，何故“×分数”の導入に比例関係の問題が選ばれているかというと，“×分数”が“割合分数”の発想で考えられているからである——このことについては§2.3.7で詳述することにする。

さて，“1時間に2㎞進むとき$\frac{2}{3}$時間では？”の問題――比例関係の問題――に対しては，つぎの線分図[註]が理解図式として用いられる：



結局は，2㎞の$\frac{2}{3}$倍の図

(＊)



になるのだが，$\frac{2}{3}$を（倍$\frac{2}{3}$という不安定な関係概念ではなしに）量$\frac{2}{3}$時間という実体概念として導入するところに，ここでの指導のポイントがあると解釈される。

さて，この図式は，子どもに$2\times\frac{2}{3}$の立式を導かせるためのものである。実際，立式はいわゆる“形式不易の原理”の適用ということで指導される。整数×整数を立式したこれまでの問題と同じ構造がこのときの問題にあることを認識させ，同じ構造であるから［整数×整数と同じ形式で］整数×分数が立式できる，という形で納得させる。

いまの問題で言えば，

1時間に進む距離×時間

＝進んだ距離

の形式を，そっくりこのまま使うことと指導される。そしてつぎに，“$2\times\frac{2}{3}$の計算の仕方は？”と導くわけである。

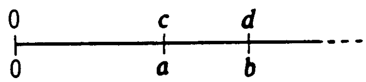
形式不易の原理で$2\times\frac{2}{3}$を立式させるのは，結局は，この立式の直接の説明[註3]を子どもに与えられないという消極的な理由からである。

なお，この問題の立式として子どもから自然に出てくるのはむしろ$2\div3\times2$である。したがって，これを$\frac{2}{3}\times2$の形に導くことも，教師のここでの課題になってくる。

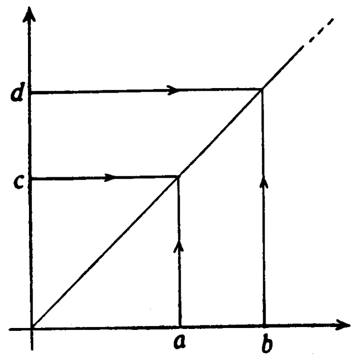
さて，“$2\times\frac{2}{3}$”はこのとき確かに，上の図式（＊）の問題の計算，即ち，1㎞の2倍の$\frac{2}{3}$倍を求める計算として意識されるものになっている。あとは，これが$\frac{4}{3}$㎞＝$\frac{2\times2}{3}$㎞になっていることを理解させ，$2\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3}$を結論して，終わりである。

（註1）　先ず，二種類の量D_1，D_2がある。（ここでは，時間と距離。）つぎに，D_1からD_2への比例関数$f: D_1 \longrightarrow D_2$がある。（ここでは“1時間に2㎞”という割合表現が示すところのもの。）　そして，D_1の要素aに対してD_2の要素$f(a)$を求めることが問題である。

（註2）　線分図



は，



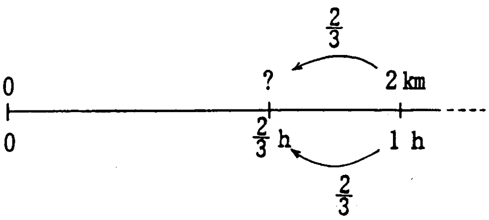
のように比例関数のグラフを“つぶした”ものと解釈できる。

（註3）　いまの問題を，f（1 h）＝2㎞となる比例関数 f：時間$\longrightarrow$距離　に対して，f（$\frac{2}{3}$h）を求める問題と解釈すれば，等式変形

f（$\frac{2}{3}$h）＝f（1 h×$\frac{2}{3}$）

$=f(1\,\mathrm{h})\times\frac{2}{3}=2\,\mathrm{km}\times\frac{2}{3}$

によって，あるいは比例関係



を見ることによって，$f(\frac{2}{3}\,\mathrm{h})$ が2㎞の$\frac{2}{3}$倍，したがって1㎞の2倍の$\frac{2}{3}$倍に等しい，ということを得る。

また，複比例関数（“量の積”）

ϕ：速さ×時間——→距離；

（1㎞／h，1h）——→1㎞

に対する ϕ（2㎞／h，$\frac{2}{3}$h）を求める問題と見ることによっても，“1㎞の2倍の$\frac{2}{3}$倍”が得られる。

そしてこの“1㎞の2倍の$\frac{2}{3}$倍”の立式が $2\times\frac{2}{3}$ なのである。

2.3.5　面分図と線分図

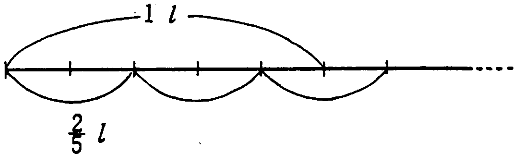
分数に対する×整数，÷整数は，量に対する倍（“等分”は整数倍の逆倍）の問題の解決を通して指導される。そしてこのときには，面分図が理解図式として用いられる。

一方，整数×分数は，第二項の分数に対する“割合分数”的解釈から，量の比例関係の問題の解決を通して指導される。そしてこのときには，線分図が理解図式として用いられる。

ところで既に述べたように（§2.3.4），比例関係の線分図は，結局は，倍の線分図である。したがって，倍の理解図式として，一方では面分図が，一方では線分図が用いられているということである。

この使い分けには，本質的な意味はない——実際，面分図と線分図は互いに書き換えができる。この場合の要点は，面分図は2次元で，たてに切りよこに切りができるのに対して，1次元の線分図では，たてに切るしかできないということにある。そこで，面分図の方が見やすいものになる。

実際，§2.3.2の面分図を線分図に移すならば，

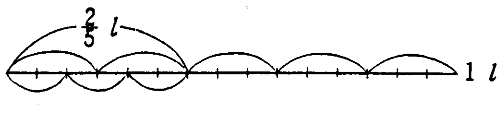


のようになる。そしてこの図式から，式変形

$$\frac{2}{5}\times 3=(\frac{1}{5}\times 2)\times 3$$
$$=\frac{1}{5}\times(2\times 3)=\frac{2\times 3}{5}$$

を納得させるわけである。

また，§2.3.3の面分図は，線分図に書き直せば，



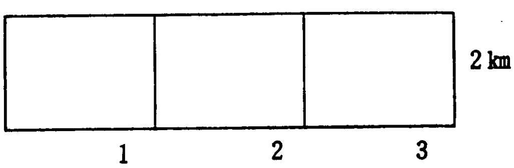
のようになる。

即ち，$\frac{2}{5}\,l$ の3等分をつくるのに，$\frac{2}{5}\,l$ の二種類の分節（2等分と3等分）を共約する分節を求めるという考え方から，$\frac{1}{5}\,l$ の3等分をつくって分節2つを1つにくくる（2と3の最小公倍数は6，そして6÷3は2）ということをする。このときの分節を1 l 全体に及ぼすと，1 l は（3×5）等分されていることになる。そしてこの図式から，

$$\frac{2}{5}\div 3=(\frac{1}{5}\times 2)\div 3$$
$$=(\frac{1}{5}\div 3)\times 2$$
$$=\frac{1}{5\times 3}\times 2=\frac{2}{5\times 3}$$

を納得させるということになる。面分図でよこに切りたてに切る操作が，線分図では線分を切った上にさらに切るという操作に変わっている。

§2.3.4の整数×分数の場合には，面分図は



のようになるが，このときにはたての幅は何も効いていない。即ち，実質的に線分図なのである。

面分図は，上の場合のように，線分図を含み込む。したがって，面分図の方が線分図よりも，応用性があるということになる。しかし，そのつけが，つぎのデリケートな問題へと回ってくる。

即ち，比例関数f：$D_1 \longrightarrow D_2$　ないし複比例関数ϕ：***Hom***（D_1，D_2）(註)×$D_1 \longrightarrow D_2$　の問題に対し，よこに切りたてに切りの面分図の方法がとれるためには，学習者が量を（長方形の）面積と同一視できることが前提になる，ということ。

勿論，線分図の場合にも《量と（線分の）長さとの同一視》の問題が起こるわけであるが，これは量の線型構造の表現とも重なっているために，紛れが少ない。例えば，速度の線分図は高々表現ということで納得しやすいが，これを面分図で表わすとなると，“速度のたてとよこをどうするのか”のような，無意味な疑問が出てくる恐れがある。

面積が面分図の表現するものであるとき，一番問題がない。では逆に，どのような量が，面分図にのせて無理がないか。よこに切りたてに切りがイメージとして無理のない量は，平面的な広がりとしてイメージ可能な量である。とすると，面積の他には，容積しかない。

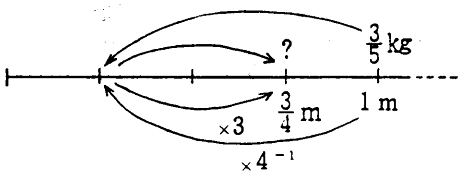
こうして，分数×整数，分数÷整数の導入問題は，面積ないし容積に関するものに限られることになる。

（註）　***Hom***（D_1，D_2）は，比例関数：$D_1 \longrightarrow D_2$　全体——これは量になる。例えば，D_1＝時間，D_2＝距離のばあい，***Hom***（D_1，D_2）は速度のことである。（§2.3.4（註3）参照）

2.3.6　分数×分数（積の公式）

分数×分数に対しては，（分数÷整数）×整数に変形して，既習内容の分数÷整数，分数×整数へ下ろしていく方法がとられる。

導入問題は，整数×分数のときと同じく，比例関係の問題である。例えば，1mが$\frac{3}{5}$kgの棒についてこれの$\frac{3}{4}$mの重さを求めるという問題。このとき，形式不易の原理の考え方で$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}$を立式させ，さらに



の比例関係の見方から$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=(\frac{3}{5}\div 4)\times 3$を納得させる。そしてこのとき，式変形$\frac{3}{5}\div 4=\frac{3}{5\times 4}$，$(\frac{3}{5}\div 4)\times 3=\frac{3}{5\times 4}\times 3=\frac{3\times 3}{5\times 4}$を，既習のこととしてやってよいわけである。

しかし，分数×分数は，分数×整数，分数÷整数に還元せずとも，面分図を使って直接導くことができる。実際，東京書籍，改訂新しい算数6上（57年）では，積の公式を，

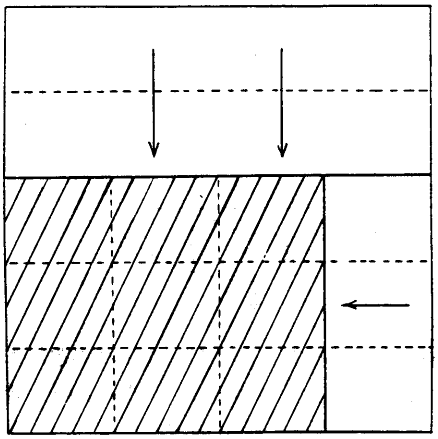
“ペンキ1dlで板を$\frac{3}{5}$㎡ぬることができます。‥‥ペンキ$\frac{3}{4}dl$では板を何㎡ぬることができますか。”

を導入問題にして，これを面分図で解く形で，導いている。

先ず，比例関係にある二種類の量（容積と面積）という設定のこの問題を，一方の量（面積）の倍の倍の問題に還元する。即ち，面積1㎡の$\frac{3}{5}$倍の$\frac{3}{4}$倍の面積を求める問題に。

目的はこの面積が1㎡の$\frac{3\times 3}{5\times 4}$倍になっているということを示すことであるが，このために，面分図を用いる。素材が面積であり，しかもその面積も板の面積ということなので，子どもにとって長方形の面分図の図式的な性格が問題になってくることが抑えられている。

1㎡の$\frac{3}{5}$倍の$\frac{3}{4}$倍が$\frac{3\times 3}{5\times 4}$㎡になることは，長方形（正方形）をたて方向に$\frac{3}{5}$の大きさにし，さらによこ方向に$\frac{3}{4}$の大きさにする操作で説明される：



この図から，$\frac{3}{5}$㎡の$\frac{3}{4}$倍が1㎡の$\frac{3\times3}{5\times4}$倍，即ち$\frac{3\times3}{5\times4}$㎡であることを子どもに了解させ，$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{5\times4}$を納得させるわけである。

2.3.7　“×分数”と“割合分数”の発想

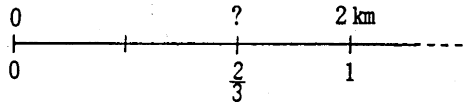
“×分数”は，現行では二量の比例関係の問題を導入問題にして指導されている。それは，“×分数”が，伝統的に“割合分数”の発想で考えられてきているからである。

“割合分数”は分数の一つの意味（身分）のように考えられているが，この認識は誤りである。“割合分数”は，分数についての語用論である。即ち，例えば分数$\frac{2}{3}$について，これを“1に対する$\frac{2}{3}$”というように用いるという。

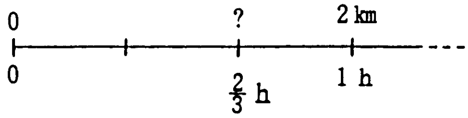
“割合分数”の語用の中の分数は，量である。“1に対する$\frac{2}{3}$”は，“量1に対する量$\frac{2}{3}$”ということである。

“×分数”は，この“割合分数”の発想で考えられている。即ち，“×$\frac{2}{3}$”なら，《量xに対して，xを1（量）と見たときの$\frac{2}{3}$（量）に相当する量を求めるのが“×$\frac{2}{3}$”の意味である》と解釈される。ところが，この“1と見る”というのは，子どもにとって非常に難しいことになる――子どもだから難しいというのではなく，この難しさは本質的なものである[註]。そこでどうしているかというと，“×分数”に対して直接“割合分数”の語用を持ち出すのではなく，比例関係にある二量という形で“割合分数”の見方を出すのである。

具体的に見てみよう。“×$\frac{2}{3}$”の指導は，“1時間に2㎞の距離を進むとき$\frac{2}{3}$時間では？”（§2.3.4）のような問題から入る。しかし，示したい問題は“2㎞の$\frac{2}{3}$は？”である。そして“割合分数”の発想では，“2㎞の$\frac{2}{3}$”は“2㎞を1と見たときの$\frac{2}{3}$に相当する距離”のことである。この見方を図式化すると，

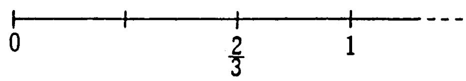


になる。ところが，“1と見る”というのは難しい。そこでこの図式を比例関係の図式

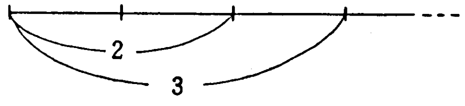


にする。このときには，“2㎞に対応している1は何かのことか”といった疑問は，抑えられる。しかも，第一の図式はもともと二量の比例関係の図式であるから――実際，0，$\frac{2}{3}$，1の身分は量である――，これを第二の図式に換えても，“割合分数”の<u>たましい</u>は生き残っている。

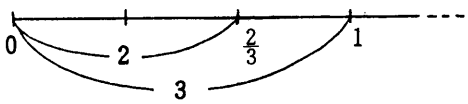
しかし，“×分数”に対するこの“割合分数”の見方は，論理的には倒錯したものである。これまで繰り返し述べてきたように，“1に対する$\frac{2}{3}$”と言うときの“$\frac{2}{3}$”は1（量）の$\frac{2}{3}$の量であり，したがってこれ以前に倍の“$\frac{2}{3}$”がある。量$\frac{2}{3}$の図式



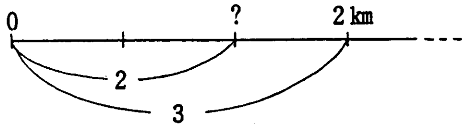
は$\frac{2}{3}$倍の図式



に，



のように依拠している。したがって，“2㎞の$\frac{2}{3}$”の図式は，



が本来のものである。(この意味では，“2㎞を1と見るときの$\frac{2}{3}$”というよりは，むしろ“3と見るときの2”の言いかたの方が，適切である。)

（註）　数学的には，先ず，分数全体（有理数体）が，量——但し，有理数体上の1次元線型空間の意味での——と見られなければならない。このとき，分数の量（体系）と距離の量（体系）の間の同型＝比例関数fで，f（1）＝2㎞であるものが一意的に存在する。2㎞を1と見るとはこのfを考えることであり，2㎞を1と見たときの$\frac{2}{3}$に相当する距離を考えるとは，f（$\frac{2}{3}$）を考えることである。

2.3.8　“特殊から一般”の実態

分数の乗法に対する現行の指導は，特殊から一般へ進むものと見なされている。しかしそれは，どのような“特殊から一般”か。

実際，特殊から一般と言っても，それは色々に解釈し得る。例えば，つぎの三つ：

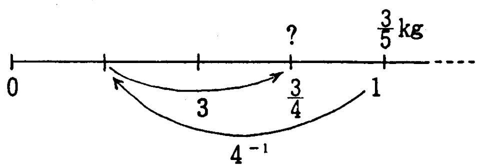
1）分数×整数，分数÷整数，整数×分数を経て分数×分数へ，という外見的な特殊から一般.

2）立式における形式不易の原理の適用.

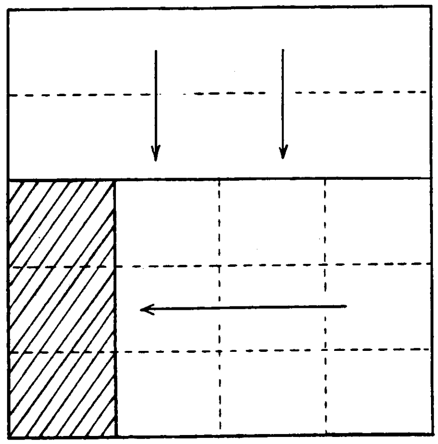
3）分数の乗法に対する理解図式の特殊から一般.

現行の指導は，1）および2）の意味では確かに特殊から一般になっている。では，3）の意味ではどうか。

既に見たように，×整数と÷整数では，累加と等分という意味解釈から，面分図が理解図式になっており，×分数では，“割合分数”の考え方から，線分図が理解図式になっている。$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}$は，“$\frac{3}{5}$kgの$\frac{3}{4}$”（§2.3.6）のような問題から入り，



の理解図式によって（$\frac{3}{5}$÷4）×3の問題におろされる。一方，$\frac{3}{5}$÷4には，“$\frac{3}{5}$ l の4等分”のような問題と，面分図



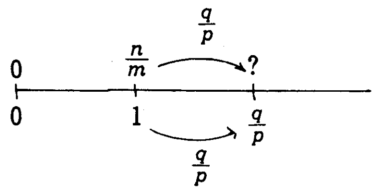
が応じている。この二つに理解図式的な——即ち，意味的な——つながりはない。しかし，現行の指導法は，前者の$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=$（$\frac{3}{5}$÷4）×3に後者で結論された<u>形式</u>$\frac{3}{5}\div 4=\frac{3}{5\times 4}$を代入するものになっている。このように，3）の意味では，現行の指導法は“特殊から一般”ではない。分数の乗法を一貫して見通せる理解図式を，現行の指導法は用意していないのである。そこでは，理解図式は各特殊が完結されることにのみ効いており，またそのように用いられている。

なお，面分図を分数計算の理解図式として一貫して用いることも可能（しかも，［分数＝比（倍)］の認識を保って）なのであるが，§2.3.5で述べたように，それは，任意の量と面積

との同一視というデリケートな問題（特に，その量をたてに切りよこに切るを子どもに納得させる論理の問題）を背負うことになる。

2.4　分数の除法

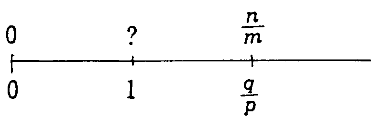
現行では，乗法は“割合分数”の考え方で指導される。そしてこのときは，乗法$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}$は《[$\frac{n}{m}$＝量] の$\frac{q}{p}$倍――$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}$》の意味になる：



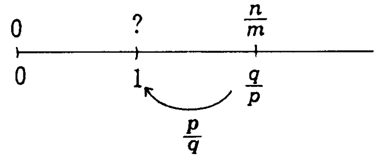
この乗法からは，全く異質な二つの逆算法――除法――が導かれる。即ち，ξ（量）$\times\eta$（倍）＝ζ（量）に対し，ζ（量）とη（倍）からξ（量）を求める除法と，ζ（量）とξ（量）からη（倍）を求める除法の二つである。それは，自然数の段階での“等分除”と“包含除”に応じている。

除法のこの二つの異なる意味は，“割合分数”の発想に立って量としての数を主役に据えたことからの帰結である。しかし，その意味は，出発点にならない。実際それが依拠する乗法の意味ξ（量）$\times\eta$（倍）＝ζ（量）は，ξ（倍）$\times\eta$（倍）＝ζ（倍）へと遡行する。したがって，$\frac{n}{m}$（量）$\div\frac{q}{p}$（倍），$\frac{n}{m}$（量）$\div\frac{q}{p}$（量）は，この意味において直接計算されるのではなく，$\frac{n}{m}$（倍）$\div\frac{q}{p}$（倍）の意味に下ろしたところで計算される。

なお，“割合分数”の発想では，$\frac{n}{m}$（量）$\div\frac{q}{p}$（倍）の理解図式は，

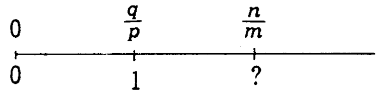


のようになる。そして？は，

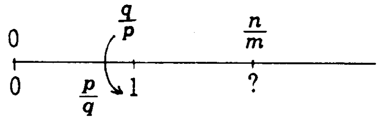


の見方から，＝$\frac{n}{m}\times\frac{p}{q}$となる。

また，$\frac{n}{m}$（量）$\div\frac{q}{p}$（量）は，



を理解図式として，



と見ることで，＝$\frac{n}{m}\times\frac{p}{q}$となる。

この図式は，$\frac{n}{m}$，$\frac{q}{p}$，1，？の配置のところが，根本的に難解である。そしてこの種の難解さが，正に，分数の除法の現行の教材を特徴づけている。