算数科“量と測定”領域教材研究
—— 基 礎 (2) ——

宮 下 英 明

“Quantities and Measurement” in Elementary School Mathematics
—— Foundation (2) ——

Hideaki MIYASHITA

目　　次

昭和63年4月30日受理

4 量(形式)の定式化

4.1 量(形式)の公理的規定

前章では，“てんびん”の上で重さという量を対象化し，その論理(形式)を定め，そして論理の含意を見るということをしてきた。そこでの主題は，〈量構成の論理〉であった。

本章では，これとは逆に，量を公理的に規定するという形で，量(形式)の定式化を行なう。量構成という論理構築の実践の到達点が，これの出発点である。(公理的規定は，つねに結果論である。)

“量”は，われわれの生活実践の或る形態に対して読まれたところのものである。したがって，量(形式)を述べるとは，実践の形式を述べることに他ならない。

さらに，実践に形式が有るというわけではない。形式は，解釈(読み)に過ぎない。読まれた形式は，実践とは別ものである。

その読みはあくまでも恣意である。以下に述べる量(形式)も，一つの恣意的読みでしかない。

4.2 対象と，それの代数的構造

集合Q，D，Nがある。

Qの要素を，“量(大きさ)”と言い表わす。

Qの要素に対するDの要素の作用$_+$ ——$X\in Q$ に対する $x\in D$ の作用が定義されるときこれを X_+x と書く——があり，条件：

任意の$X,Y\in Q$ に対し，$X_+x=Y$ となる $x\in D$ が一意的に存在する.

が成り立っている。このときのxを$\overrightarrow{XY}$と書き，“YのXとの差”という読み方をする。

定義より，

$$\overrightarrow{X(X_+x)}=x.$$

Dには内算法＋(加法)が定義されていて，この＋に関してDは可換群になる。零元を 0 と書き，$x\in D$ の対称元(＋に関する逆元)を$-x$と書く。また，$D\setminus\{0\}$ をD^*と表わす。

$_+$と＋の間には，関係：

$$(X_+x)_+y=X_+(x+y)$$

が成り立つ。この関係は，

$$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XZ}$$

と言い換えられる。——実際，ここでは＋を，“差をつなぐ”の読みをもつものとして導入している。

Dの要素に対するNの要素の作用$_\times$：

$$D\times N \longrightarrow D\,;\,(x,\ \xi)\longmapsto x_\times\xi$$

があり，条件：

任意の $x\in D^*$, $y\in D$ に対し，$x_\times\xi=y$ となる $\xi\in N$ が一意的に存在する.

が成り立っている。このときのξを $x:y$ と書

き，“yのxとの比”あるいは“xに作用してyになる倍”という読み方をする。

定義より，

$$x:(x_\times\xi)=\xi.$$

Nには内算法＋(加法)，×(乗法)が定義されていて，これらに関してNは可換体になる。零元を0，ξの対称元(＋に関する逆元)を$-\xi$，単位元を1，$\xi\neq0$ の逆元をξ^{-1}，とそれぞれ書く。

作用$_\times$に関して，Dは体N上の1次元ベクトル空間になる。——“ベクトル空間”であるとは，つぎの条件：

$$(x_\times\xi)_\times\eta=x_\times(\xi\times\eta)$$
$$x_\times(\xi+\eta)=x_\times\xi+x_\times\eta$$
$$(x+y)_\times\xi=x_\times\xi+y_\times\xi$$
$$x_\times1=x$$

(ここで，x，$y\in D$；ξ，$\eta\in N$) が満たされること。また，“1次元”とは，Dの元 $u\neq0$ に対し各 $x\in D$ が$u_\times\xi(\xi\in N)$ の形に一意的に書けるということである(註1)。

上に示した“ベクトル空間”の条件式は，比の形で表現すると，それぞれ

$$(x:y)\times(y:z)=x:z$$
$$(x:y)+(x:z)=x:(y+z)$$
$$x:x'=y:y'\Longrightarrow x:x'=(x+y):(x'+y')$$
$$x:x=1$$

になる。

第一式は，“倍の合成”がNにおける×の意味であることを示す。また第二式は，“倍の和”が＋の意味であることを示す。

さて，Dがベクトル空間として定立されたいま，作用$_+$の条件は，Qを《ベクトル空間Dを随伴するアフィン空間》と定義するものになっている。

こうして，作用$_+$，$_\times$でつながっている集合Q，加法群$(D,+)$，可換体$(N,+,\times)$は，1次元アフィン空間$(Q,((D,+),(N,+,\times),{}_\times),{}_+)$として，一つに括られることになる。

Nとしてわれわれがここで想定するものは，$\mathbb{Q}$(有理数体)あるいは$\mathbb{R}$(実数体)である(註2)。

(註1) 《単位を媒介した量の数表現》の数学的解釈が，これである。

(註2) 有理数全体の集合$\mathbb{Q}$と実数全体の集合$\mathbb{R}$が体の構造をもつことは，数(かず)計算の形式の拡張の結果であり，量の構造から導出されるのではない。

4.3 順序構造

4.3.1 順序構造

Q，D，Nは，アフィン空間$(Q,((D,+),(N,+,\times),{}_\times),{}_+)$の代数的構造と(以下に述べる意味で)両立するところの全順序構造をもつ。

$(D,+)$は，順序群になる。即ち，x，y，$z\in D$に対し，

$$x\geqq y\Longrightarrow x+z\geqq y+z$$

が成り立つ。

Dの正元($\geqq0$の元)全体の集合をD^+で表わし，負元($\leqq0$の元)全体の集合$(=\{-x\mid x\in D^+\})$をD^-で表わす。

$(N,+,\times)$は，順序体になる。即ち，加法群$(N,+)$として順序群であり，そして条件：

$$\xi\geqq0,\ \eta\geqq0\ \text{ならば}\ \xi\times\eta\geqq0$$

を満たす。このとき，順序体Nは順序体$\mathbb{Q}$の順序拡大体である(註)。

Nの正元($\geqq0$の元)全体の集合をN^+で表わし，負元($\leqq0$の元)全体の集合 $(=\{-\xi\mid\xi\in N^+\})$を$N^-$で表わす。

$((D,+),(N,+,\times),{}_\times)$は，順序線型空間になる。即ち，$x$，$y\in D$，$\lambda\in N$ に対し

$$x\geqq y\ \text{かつ}\ \xi\geqq0\Longrightarrow x_\times\xi\geqq y_\times\xi$$

が成り立つ。

$(Q,((D,+),(N,+,\times),{}_\times),{}_+)$は，順序アフィン空間になる。即ち，

$X\in Q$，$x\in D$ に対し X_+x が定義されるとき，

$$X\leqq X_+x\Longleftrightarrow x\geqq0.$$

言い換えると，

$X\in Q$，x，$y\in D$ に対し X_+x，X_+y が定義されるとき，

$$X_+x<X_+y\Longrightarrow x<y.$$

（註） 実際，Nの順序体の構造は $\mathbb{Q}$に順序体の構造を導くが，$\mathbb{Q}$は一意的にしか順序づけられない。

4.3.2 “アルキメデスの公理”

量の論理の“塵も積もれば山となる”の形式化は，量(Q, D, N)のDないしNに対する“アルキメデス(*Archimedes*)の公理”：

1) $x, y \in D$ で $0<x<y$ のとき，$x_{\times}n \geqq y$ となる $n \in \mathbb{N}$が存在する；
2) $\xi, \eta \in N$ で $0<\xi<\eta$ のとき，$\xi \times n < \eta$ となる $n \in \mathbb{N}$が存在する．

になる。（二つの条件は同値である(註1)。）

なお一般に，順序体Nは，上の条件2)を満たすときアルキメデス的であると言われる。アルキメデス的順序体は，実数順序体 $\mathbb{R}$の部分体に同型——実際，相似同型(註2)——である。

（註1） 1)⇒2)：Dの元 $x>0$ を任意にとる。$\xi<\eta$ は $x_{\times}\xi < x_{\times}\eta$ を導き，このとき仮定から，自然数nが存在して $x_{\times}\eta \leqq (x_{\times}\xi)_{\times}n = x_{\times}(\xi \times n)$。$x>0$ より $\xi \times n \geqq \eta$。2)⇒1）も，同様。

（註2） 二つの順序体は，正元をつねに正元に対応させるような同型対応がその間に存在するとき，相似同型であると言われる。

4.3.3 Qにおける最小元の有無

量(Q, D, N)に対して，Qに最小元が存在する場合と存在しない場合の二通りを考え，以下のように約束する。：

(1) Qに最小元が存在する場合：

Qの最小元をO（オー）で表わす。

作用$_+$ は，Dの正元の作用であればつねに定義される。言い換えると，任意の $X \in Q$ とDの正元xに対し，$x=\overrightarrow{XY}$ となる $Y \in Q$ が存在する。

このとき，Dの正元全体の集合 D^+ は，$O_{+}x$ が定義される $x \in D$ 全体の集合と一致する(註1)。さらに，D^+ からQの上への写像：

$$x \longmapsto O_{+}x$$

は，順序同型になる。

(2) Qに最小元が存在しない場合：

作用$_+$ はつねに定義される。言い換えると，任意の $X \in Q$, $x \in D$ に対し，$x=\overrightarrow{XY}$ となる $Y \in Q$ が存在する。

このとき，各 $X \in Q$ に対し定義されるDからQの上への写像：

$$x \longmapsto X_{+}x$$

は，順序同型となる。

（註1） $x \in D^+$ に対しては，定義から $O_{+}x$ が定義される。逆に，$x \in D$ に対し $O_{+}x$ が定義されれば，$x \in D^+$ である。実際，$x \in D \setminus D^+$ と仮定すると，$-x>0$。よって$(O_{+}x)_{+}(-x)$が定義されて，これは，$=O_{+}(x+(-x))=O$。ところが $-x>0$ だから $O_{+}x<O$。これは，Oが最小元であることに矛盾する。

4.3.4 離散と稠密

量(Q, D, N)において，つぎの条件は同値(註1)：

1) Dの正元>0の最小元が存在する；
2) Dの元uが存在して，任意の $x \in D$ が $x=u_{\times}n$, $n \in \mathbb{Z}$ の形に書ける．

実際，Dの正元>0の最小元uに対し，任意の$x \in D$ は $x=u_{\times}n$, $n \in \mathbb{Z}$ の形に書ける。このとき，量(Q, D, N)は離散であると言うことにする。

(Q, D, N)が離散の場合，（順序体 $\mathbb{Q}$の順序拡大体である）Nは $\mathbb{Q}$としてしか機能していない。

つぎの条件は同値である(註2)：

1) (Q, D, N)は非離散；
2) Qは稠密(註3)；
3) Dは稠密．

この条件が満たされるとき，量(Q, D, N)は稠密であると言うことにする。

Dが稠密の場合，Dの各元 $u>0$ に対して，DのNの中への順序同型（埋め込み）が，

$$u^{*} : x=u_{\times}\xi \longmapsto \xi$$

で定義される。

（註1） 1)⇒2)：正元>0 の最小元をuとする。$x=u_{\times}\xi>0$, $\xi \in N$ のとき $\xi \in \mathbb{N}$ であることを示

す。Nがアルキメデス的であることにより，$n \leqq \xi < n+1$ となる整数nがとれる。この場合 $n>0$。$v=x-u_{\times}n=u_{\times}(\xi-n)$ とすると，$0 \leqq v < u$。u は正元>0の最小元だから $v=0$，よって $\xi=n \in \mathbb{N}$。$x=u_{\times}\xi<0$ のときは，$-x=u_{\times}(-\xi)>0$ より $-\xi \in \mathbb{N}$。よって $\xi \in \mathbb{N}$。

2)⇒1)：$u>0$ のとき，uはDの正元>0の最小元である。実際，$0<v<u$ となる $v \in D$ はuの整数倍の形では書けない。$u<0$ のときは，$-u$がDの正元>0の最小元になる。

（註2） 1)⇒3)：$x<y$ のとき，$0<w<y-x$ となるwに対し $x<x+w<y$。

2)⇒3)：$X<Y$ のとき，$0<x<\overrightarrow{XY}$ となる$x \in D$ に対し $X<X_{+}x<Y$。

3)⇒1)：u がDの正元>0の最小元であるとき，$X \in Q$ に対し $Y=X_{+}u$ とおくと，$X<Z<Y$ となる $Z \in Q$ は存在しない。

（註3） 全順序集合は，任意の二元 $a<b$ に対し $a<c<b$ となる元cがとれるとき，稠密であると言う。

4.3.5 連　続　性

一般に，稠密な順序集合Aに関して，“連続性”の概念が“連続性の公理”：

> Aの，上に有界な部分集合Mにはその上限 $\sup M$ が存在し，下に有界な部分集合Mにはその下限 $\inf M$ が存在する．

で定義される。

稠密なQ，Dの場合，Qが連続であることとDが連続であることは，互いに同値である。そしてこのときには，$N=\mathbb{R}$である。——実際，このときにはNも連続性の公理を満たすのでなければならず，特に，順序体Nは完備となる(註)。一方，順序体 $\mathbb{R}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の完備なアルキメデス的順序拡大体として特徴づけられる。したがって，$N=\mathbb{R}$。

われわれは，Q，Dが連続な量$(Q, D, \mathbb{R})$を“連続量”と呼ぶことにする。

（註） 連続性の公理を満たす順序体Nが完備であることの証明は，実数列に関するコーシー（*Cauchy*）の収束判定法の証明（周知のもの）と全く同型である。

4.4 位　相　構　造

Q，D，Nは，順序アフィン空間$(Q, ((D, +), (N, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$（§4.3.1）の構造と（以下に述べる意味で）両立するところの位相構造をもつ。

順序群$(D, +)$は順序位相群になる。即ち，それは位相群である——$D \times D$からDへの写像：

$$(x, y) \longmapsto x+y$$

が連続で，DからDへの写像：

$$x \longmapsto -x$$

が連続。そして，位相が順序位相になっている——各点 $x \in D$ に対し，xを含む開区間全体はxの近傍系の基をつくる。

順序体$(N, +, \times)$は，順序位相体になる。即ち，それは位相体である——順序群$(N, +)$として順序位相群であり，$N \times N$からNへの写像：

$$(\xi, \eta) \longmapsto \xi \times \eta$$

が連続で，$N^{*}=N \setminus \{0\}$ から N^{*}への写像：

$$\xi \longmapsto \xi^{-1}$$

が連続。そして，位相が順序位相になっている。

順序線型空間$((D, +), (N, +, \times), {}_{\times})$は，順序位相線型空間になる。即ち，$D \times N$から$D$への写像：

$$(x, \lambda) \longmapsto x_{\times}\lambda$$

が連続。

順序アフィン空間$(Q, ((D, +), (N, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$は，順序位相アフィン空間になる。即ち，$X_{+}x$が定義される$(X, x) \in Q \times D$ の全体 $S \subset Q \times D$ からQへの写像：

$$(X, x) \longmapsto X_{+}x$$

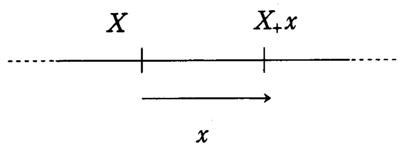
が連続。

なお明らかに，離散な(Q, D, N)に対しては，Q，Dの位相は離散位相と一致する。

4.5 量（形式）の図式化——“量直線”

量（形式）(Q, D, N)は，1次元実アフィン空間として見た直線に，埋め込める。

直線は，つぎのような具合に実アフィン空間$(Q_E, ((D_E, +), \mathbb{R}, {}_{\times}), {}_{+})$と見る。即ち，点集合としての直線が$Q_E$。点の変位ベクトル(移動ベクトル)の集合が$D_E$。＋は変位ベクトル(移動ベクトル)の合成。変位ベクトル(移動ベクトル)に対する実数の作用$_{\times}$は“倍”。作用$_{+}$は，“平行移動”：



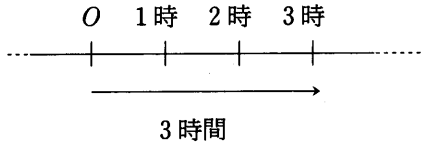
量(形式)(Q, D, N)に対し，$O\in Q$，$u\in D\setminus\{0\}$を固定する。但し，Qが最小元をもつ場合には，Oとして最小元をとり，$u>0$とする。そして同じく，直線$(Q_E, D_E, \mathbb{R})$に対し，$O_E\in Q_E$，$e\in D_E\setminus\{0\}$を固定する。

このとき，(Q, D, N)の$(Q_E, D_E, \mathbb{R})$への同型(埋め込み) $F: Q\longrightarrow Q_E$ で，

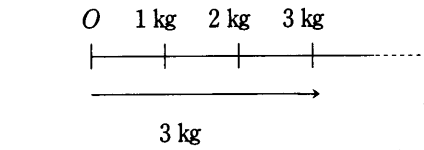
$$F(O_{+}u)=O_{E+}e$$

となるものが一意的に存在する(註)。そしてこのFによって，(Q, D, N)は$(Q_E, D_E, \mathbb{R})$としての直線(の中)に表現できる。特に，Qが最小元をもつ場合，(Q, D, N)は半直線(の中)に表現される。

例えば，時刻は，(時刻の差としての)時間を随伴ベクトル空間とするアフィン空間として，つぎの様な具合に表現される：

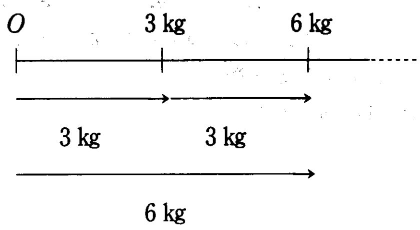


また，重さが，



のように表現される。——直線上の点である3 kgはQの元として，矢線の3 kgはDの元として，それぞれ意味づけられる。

このとき，例えば“3 kgに3 kgで6 kg”の図式は，$3\,\mathrm{kg}_{+}3\,\mathrm{kg}=(O_{+}3\,\mathrm{kg})_{+}3\,\mathrm{kg}=O_{+}(3\,\mathrm{kg}+3\,\mathrm{kg})=O_{+}6\,\mathrm{kg}=6\,\mathrm{kg}$ と読むことによって，



のようになる。

(註)　DのD_Eの上への同型fで，$f(u)=e$となるものが一意的に存在する。そしてこのfに対して，QのQ_Eへの同型Gが

$$G(O_{+}x)=O_{E+}f(x)$$

の定義で得られるが，FはこのGと同じものである。

4.6　アフィン空間(Q，D，N)からの，順序位相アフィン空間構造の導出

(Q, D, N)の順序位相アフィン空間の構造は，実際のところ，それの1次元アフィン空間の構造から導出できてしまう。即ち，1次元アフィン空間から出発して，この構造と両立する順序構造，位相構造を定義し，結果的に順序位相アフィン空間の構造に到達することができる。

4.6.1　ベクトル空間(D，N)からの順序位相ベクトル空間構造の導出

1次元ベクトル空間$((D, +), (N, +, \times), {}_{\times})$において，順序関係≦がつぎの定義で得られる。即ち，Dの元$u\neq 0$を固定し，そして$x, y\in D$に関する関係$x\leqq y$を，つぎのこととして定義する：

$x=u_{\times}\xi$，$y=u_{\times}\eta$となるξ，$\eta\in N$は，$\xi\leqq\eta$(註1)。

≦は明らかに順序関係であり，しかも全順序関係になっている。

順序≦は，Dのどの正元$\neq 0$からも同じく導かれる。また，負元$\neq 0$は≦の逆の順序（特に，

“正元・負元”が逆になる）を導く――しかしこれは，≦に同型である。

Dの位相としては，いま定義した順序≦が定める順序位相（即ち，各点xに対しxを含む開区間をxの近傍系の基とするような位相）を考える。

定義により，Dの順序構造と位相構造は両立する。そしてさらにこれらは，Dにおけるベクトル空間の（代数的）構造と両立する(註2)。即ち，Dはこの三つの構造に関して順序位相ベクトル空間になる。

（註1） Nは$\mathbb{Q}$か$\mathbb{R}$であり，これの順序関係≦は，いまとは別の文脈で既に定義されている。

（註2） 1）［ベクトル空間の構造と順序構造の両立］：$x \leqq y$ で，$x=u_\times\xi$，$y=u_\times\eta$ とすると，$\xi \leqq \eta$。任意の $z=u_\times\zeta$ に対し，$x+z=u_\times(\xi+\zeta)$，$y+z=u_\times(\eta+\zeta)$ かつ $\xi+\zeta \leqq \eta+\zeta$，よって $x+z \leqq y+z$。また，任意の正数μに対し，$x_\times\mu=u_\times(\xi\times\mu)$，$y_\times\mu=u_\times(\eta\times\mu)$ かつ $\xi\times\mu \leqq \eta\times\mu$，よって $x_\times\mu \leqq y_\times\mu$。

2）［ベクトル空間の構造と位相構造の両立］：写像 $f:(x,\ y) \longmapsto x+y$，$g: x \longmapsto -x$，$h:(x,\ \xi) \longmapsto x_\times\xi$ の連続性が，示すべきことがらである。ここでは，写像$h:(x,\ \xi) \longmapsto x_\times\xi$ の連続性のみを示しておく。

$(a,\ \beta) \in D\times N$ におけるhの連続性を示す。$a=u_\times\alpha$ とする。$a_\times\beta$ の任意の近傍は，

$$\mathcal{V}=]a_\times\beta-u_\times\delta,\ a_\times\beta+u_\times\delta[$$
$$=]u_\times(\alpha\times\beta-\delta),\ u_\times(\alpha\times\beta+\delta)[,\ \delta>0$$

の形の開区間――$a_\times\beta$ の開近傍――を含む。そして，$\varepsilon=\min(\delta/(|\alpha|+|\beta|+1),\ 1)$ とおくとき，$\varepsilon>0$ で，

$$\mathcal{V}'=]\ u_\times(\alpha-\varepsilon),\ u_\times(\alpha+\varepsilon)\ [\ \times]\ \beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon\ [$$
$$=]\ a-u_\times\varepsilon,\ \alpha+u_\times\varepsilon\ [\ \times]\ \beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon\ [$$

は積空間 $D\times N$ における$(a,\ \beta)$の開近傍。しかも，これのhによる像は$\mathcal{V}$に含まれる。（実際，$(x,\ \xi) \in \mathcal{V}'$ に対し，$x=a+u_\times\mu=u_\times(\alpha+\mu)$，$\xi=\beta+\nu$ とすると，$x_\times\xi=u_\times((\alpha+\mu)\times(\beta+\nu))=a+u_\times(\alpha\times\nu+\beta\times\mu+\mu\times\nu)$。しかも，$|\alpha\times\nu+\beta\times\mu+\mu\times\nu| \leqq (|\alpha|+|\beta|+\varepsilon)\times\varepsilon<\delta$。よって，$h(x,\ \xi) \in \mathcal{V}$。）

4.6.2 アフィン空間$(Q,\ D,\ N)$からの，順序位相アフィン空間構造の導出

$(D,\ N)$の1次元ベクトル空間の構造から導出される順序位相ベクトル空間構造は，さらに，アフィン空間$(Q,\ D,\ N)$に，順序位相アフィン空間の構造を導く。

先ず，Qにおける順序関係≦が，つぎのように定義できる。即ち，$X,\ Y \in Q$ に対し $X_+x=Y$ となる $x \in D$ が一意的に存在するが，$X \leqq Y$ を $x \geqq 0$ のことと定める(註1)。

そしてここで，≦の導く順序位相をQにおいて考える。このとき，Qは順序位相アフィン空間になっている(註2)。

（註1） 各 $X \in Q$ に対し，$X_+0=X$ より，$X \leqq X$。$X \leqq Y$，$X \geqq Y$ で，$X_+x=Y$，$X=Y_+y$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，$X_+(x+y)=X$；よって $x+y=0$，さらに $-x=y \geqq 0$；したがって $x=0$ であり，$X=X_+x=Y$。$X \leqq Y$，$Y \leqq Z$ で，$X_+x=Y$，$Y_+y=Z$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，$X_+(x+y)=Z$ かつ $x+y \geqq 0$；よって，$X \leqq Z$。結局，≦は順序関係。また，$X_+x=Y$ のとき，$x \geqq 0$，$x=0$，$x \leqq 0$ の各場合に応じて $X \leqq Y, X=Y, X \geqq Y$ であるから，≦は全順序関係。

（註2） 1）順序構造と位相構造の両立は，この場合の位相の定義より自明。

2）代数的構造と順序構造の両立：$X \leqq Y$ で，$X_+x=Y$，$x \geqq 0$ とする。任意の $w \in D$ に対し，$(X_+w)_+x=(X_+x)_+w=Y_+w$。$x \geqq 0$ より，$X_+w \leqq Y_+w$。

3）代数的構造と位相構造の両立：写像f：$(X,\ x) \longmapsto X_+x$ が$(A,\ a) \in Q\times D$ で連続であることを示す。A_+a の任意の近傍は，

$$\mathcal{V}=]\ A_+(a-d),\ A_+(a+d)\ [,\ d>0$$

の形の開区間――A_+a の開近傍――をふくむ。いま $e=d_\times 2^{-1}$ とおくと，$e>0$ で，

$$\mathcal{V}'=]A_+(-e),\ A_+e[\ \times]a+(-e),\ a+e[$$

は積空間 $Q\times D$ における $(A,\ a)$ の開近傍

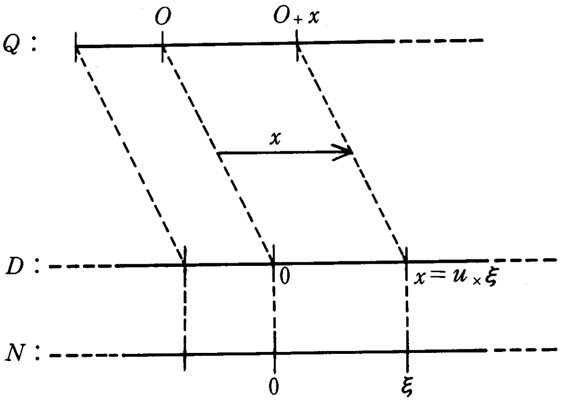
で，しかもこれのfによる像は，$\mathcal{U}$に含まれる。（実際，$(X, x)\in{}^{-r}$ に対し，$X=A_+b$, $x=a+c$ とすると，$X_+x=A_+a_+(b+c)$。$|b+c|<e+e=d$ より，$X_+x\in\mathcal{U}_0$。）

4.7 量(Q, D, N)の，量(D, D, N) および量(N, N, N)への埋め込み

一般に，任意のベクトル空間$((D,+), N, {}_\times)$は，Dの加法$+$を"集合Dの要素に対するベクトル空間Dの要素の作用"と読むとき，それ自身を随伴ベクトル空間とするアフィン空間$(D, ((D,+), N, {}_\times), +)$になる。また，任意の体$(N, +, \times)$は，乗法$\times$を"加法群$N$の要素に対する体$N$の要素の作用"と読むとき，それ自身を係数体とするベクトル空間$((N,+), N, \times)$になり，特に，アフィン空間$(N, ((N,+), N, \times), +)$になる。

したがって，量(Q, D, N)からは，量(D, D, N)および量(N, N, N)が導出される。量(N, N, N)を，"量としての数"と呼ぶことにする。

Qの任意の元O（オー）に対して定義される写像：$O_+x \longmapsto x$ は，アフィン空間(Q, D, N)のアフィン空間(D, D, N)の中へ埋め込みになる。さらに，O（オー）とDの任意の元$u\neq 0$に対して定義される写像：$O_+(u_\times\xi) \longmapsto \xi$は，$(Q, D, N)$の$(N, N, N)$の中への埋め込みになる。



（図式は，Qに最小元がある場合）

5 量の数値化

5.1 量の数値化

5.1.1 《単位×数》

量(Q, D, N)（前章）において，$O\in Q$ と $u\in D^*$ を固定する。但し，Qが最小元をもつときには，Oとして最小元をとり，$u>0$ とする。また，Qが離散のときには，uとしてDの正元>0の最小元をとる。

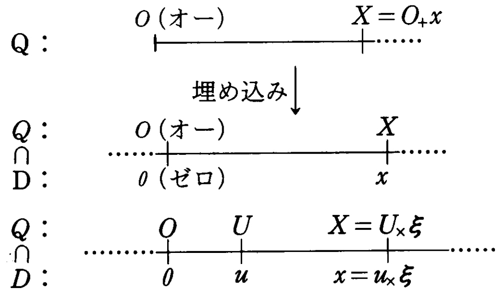
ここで(Q, D, N)を，写像：

$$O_+x \longmapsto x$$

によって(D, D, N)の中に埋め込んで考える（§4．7）。

$U=O_+u$ とおく。そしてこれに対して"単位"という読み方をする。

このとき，$X\in Q$ $(\subset D)$ を $U\in Q$ $(\subset D)$ で $X=U_\times\xi$ の形に表現することを"単位UによるXの数値化"と言い，"Xの数値はξ"という言い回しをする。



（図式は，Qに最小元Oがある場合）

5.1.2 単位の恣意性

量（カテゴリー）の単位は，ひとが恣意的に決める。

このことは，稠密量が対象のときには，意識され易い。稠密量では，ある特定の量(大きさ)を特権化する理由が見出せないからである——理屈が見出せるとすれば，それは量（カテゴリー）それ自体にではなく，この量（カテゴリー）の関わる生活形態に見出せるのである。(例えば，時間の単位の"年"，"日"の場合のように。)

離散量の場合，"単位の恣意性"の概念は意識

に上り難い。何故なら，離散量に特権化できる量（大きさ）があり，これを即単位として受け取ってしまい易いからである。その量(大きさ)とは，任意の量(大きさ)をそれのいくつ分(整数倍）の形に表現できる量（大きさ）のことである——最小元のない量（カテゴリー）ではこのような量（大きさ）は二つあり，互いに対称である。

離散量の場合，“単位の恣意性”の主題に際しては，“離散量への解釈の恣意性”の主題を併せて考えておくべきである。というのも，“離散量への解釈の恣意性” の概念を意識しておかないと，この概念で捉えるのが自然な事例が，“単位の恣意性” の概念で無理に解釈されてしまうということになり易いからである。

例えば，

・紙は，２枚ずつ数えることも，５枚ずつ数えることもできる；

・紙は，１枚２枚と数えられる一方，束が一つ二つとも数えられる；

では，前者を“単位の恣意性”の話に，そして後者を“異なる離散量の解釈”の話にそれぞれ振り分けるのが，自然である。

5.1.3　量を数値化する理由

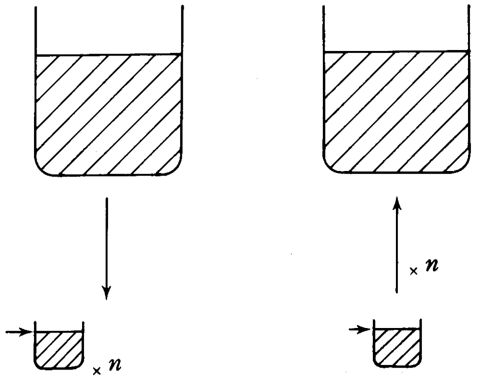
量を数値化する——《単位×数》(“単位いくつ分”／“単位の何倍”）の形に表現する——ことの最大の意義は，量計算である。この手続によって，量計算が数計算として可能になる。

その他に以下に述べるようなものが，量の数値化の理由（場合）になる。

先ず，量の特定という目的から，量の数値化が為されることがある。《基準とする量のいくつ分/何倍》という形による量の特定であり，基準の量が単位として機能している。

量の特定の実践は,量をよりよく捉えさせる/捉えるという目的の下にある。この意味では，単位としての《基準の量》は，《既知の/身近な量》ということで用いられている。量の特定とは，量を既知の/身近な量に引き寄せて，それを捉え易い/身近なものにするということである。そして，量の数値化という形の量特定における《身近な量に近づける》は，《(身近な量に置き換えるのでなく）身近な量の数（かず）にすることによって，それを身近なものにする》である。

所期の量の実現（同じ量の実現）のために，《単位×数》の考え方が用いられることがある。即ち，実現しようとする量を《単位いくつ分/単位の何倍》の形で定めておき，そしてこの形でそれを実現する。これは，量特定のための量の数値化の逆の発想になる。



量の特定　　　所期の量の実現

量の数値化は，また，量の比較を理由に為されることもある。即ちそのとき，量比較は，同一の単位に対する数値の比較という形で行なわれる。

5.1.4　単 位 の 選 択

量を“単位いくつ”という形で把捉するとき，それのし易さ・し難さは，選ばれている単位と“いくつ”の両方に対する把捉のし易さ・し難さにかかっている。そして，単位の把捉のし易さと“いくつ”の把捉のし易さは，一般に，矛盾する関係にある。即ち，“いくつ”は少ない桁数の数である程捉え易いが，“いくつ”を小さい数にするためには，捉え難い単位を導入しなければならないということになる。(註)。

単位の選択は，また，《量の一意的組合せ表現を求める》(§７．１．３）の文脈にもある。

(註)　例えば，面積に対する“1000000m²”(“1m四方の広さ1000000個分”)と“1km²”(“1km四方の広さが一つ分”)の二つの表現は同値であるが，前者では，単位“m²”の捉え易さに反して数“1000000”が捉えにくく，後者では，数“1”の捉え易さに反して単位“km²”が捉え難い。

また例えば，“0.001mm”と“1μ(ミクロン)”の場合など。

5.1.5　《単位×数》の言い回し，表記

《単位×数》をどのようなことばにし，またどのように書くも，自由である。問題は，それがひと（他人）に通用するかどうかである。

言い回しや表記(例えば，《m(ﾒｰﾄﾙ)×3》の言い回し・表記の“3m”)を保証しているのは，〈約束〉である。その〈約束〉――一つの恣意を固定する約束――は，文化の問題に属する。

5.2　量の数値化の実践――量測定

5.2.1　量測定＝実践

量を《単位×数》の形に表現する実践が，測定である。

これまでの話では，量に対する《単位×数》の表現はいつも自由に行なわれてきた。それは，表現が論理の上のことであったからである。その表現は実践ではなかった。

論理の上では，量に対する《単位×数》の表現は約束されている。論理の中にこの約束が含まれているのである。しかし，実践では，このような表現に到達する保証はない。実践では，表現はつねに結果論である。

表現を可能性として先取することもできない。実践の中では，《表現の可能性》さえも，保証のない（即ち，裏切られるかも知れない）幻想なのである。

5.2.2　測定における〈モノ〉

測定――量を《単位×数》の形に表現する実践――について，“量を単位で測る”という言い方を普通にする。しかし，測ろうとする量も，単位も，あくまでも読み（ことば）であり，実在しているのは，はじめに量が読まれているところのモノ（事態）と，単位がそこに読まれるところのモノである。例えば，測ろうとする量が読まれているモノとしての液体と，単位dlがそこに読まれるモノとしてのdl計量カップ，という具合に。

さらに，測定は量の操作ではなく，あくまでもモノに対する操作である。そしてモノに対する或る一連の操作が，“単位いくつ/単位の何倍”と読まれる。

操作に対するこの読み（解釈）は，実践であり，量の論理の外にある。“論理”ということばを強いて使うならば，それは経験の論理である。しかし，あくまでもそれは擬似論理である。読み（解釈）は実践であり，保証をもたない〈賭け〉である。

5.2.3　単位の選択

§5.1.4で述べたこと――“単位の把捉と，数値の把捉の矛盾”――は，《量を“単位いくつ”という形に実現する（即ち，測定する）ときのそれのし易さ・し難さ》の議論にそっくり移行する。但しこのときには，“単位の把握のし易さ・し難さ”を，“単位の扱い易さ・扱い難さ”に読み換え，“数値の把捉のし易さ・し難さ”を，“単位を数え上げる労力の軽・重”に読み換えるわけである。

§5.1.4ではまた，単位の選択は《量の一意的組合せ表現を求める》(§7.1.3)の文脈にもあると述べた。ところで，量の一意的組合せ表現――測定値が最も小さくなるような単位で“単位いくつ”を表現し，このときの余りを，再び，測定値が最も小さくなる単位で“単位いくつ”を表現する；以下この手続きを繰り返す――は，あくまでも表現の操作に関するものであって，測定の手続きではない。実際，測定においては，測定値を最も小さくするような単位の選択は，一か八かの〈賭け〉である。但し，一意的組合せ表現は単位数上げの回数が最も少なくなる測定の仕方と対応しており，この意味では，一意的組合せ表現を直接実現することを意図して測定するというのが，測定の効率的ないし実際的

な形態ということになる。

5.2.4 測定値の決定

測定値は，決められる。

測定値には，“正確”も“おおよそ”もない。測定値を（“真の値”に対する）“近似値”であると言うこともできない。測定が物理の上の事態である以上，“真の値”は原理的にあり得ない。そして，“真の値”のないところには，道理として，“正確”，“おおよそ”，“近似値”といったことばは立たない。

測定値は，選択が可能な域の中から一つに決められる。そのときの選択域がどのようになっていて，そしてどのように測定値が決められるかは，実践の（即ち，ケース・バイ・ケースの）問題である。それは，目的と状況に依存する。特に，選択には基準がある（考えられている，意識されている）場合もあり，ない場合もある。

測定値は，ひとの都合で決められる。一方，“都合に適う”が，“有効／実効値”と言うときの“有効／実効”の意味である。したがって，測定値は，現実的なもの——即ち，生活実践の中のもの——である限り，《有効／実効値である》ということをそれの含意とする。測定値は，有効／実効値として決められる。測定値の妥当性の基準は，“正確”ではなく，有効／実効性である。

5.2.5 “はした”の処理

“はした”は，単位のはした——単位の量より小さい量——のことである。より厳密に言うと，“単位”として意識されている量のはしたである。一つの量は，そのときに考えられている単位次第で，はしたになったりならなかったりする。例えば，㎜より大きく㎝より小さい量は，“単位”㎜に対しては“はした”ではなく，“単位”㎝に対しては（㎜を知っていることは，㎝を単位として意識することを妨げない）“はした”である。

測定では，はしたの処理がしばしば問題になる。そして，はしたの処理形態は，そのときの有効／実効値の意識によって違ってくる。《はしたの数値化は不要》と判断したときには，“切り捨て”あるいは“切り上げ”の処置が候補に浮かぶ。はしたに少しは顧慮しておこうということでの“半分からの切り上げ•切り下げ”（この意味での“四捨五入”）の処置もあり得る。また，はしたの数値化が必要と判断されたときには，下位の単位を導入してはしたを小数に表現するとか，はしたをいまの単位の分数倍の形に表現するとかの処置に及ぶことになる。

5.2.6 概　　測

“概測”は，（《単位いくつ》ではなく）《単位だいたいいくつ》の形に量表現して終えてしまう測定の謂いである。

《単位だいたいいくつ》にすることは，“はした”の処理とは違う。“概測”には，“はした”の概念は入り込まない。“概測”は，“単位いくつ”の“いくつ”を概数で出す測定のことである。

概数で出す理由は，それがそのときの有効／実効値になるからである。“きっちりいくつと出すことが不可能”といった問題ではない。——“きっちりいくつと出すことが不可能で，止むを得ずだいたいいくつとして出した”というのが事実だったとしても，“いくつと出すことが不可能ないまの状況での有効／実効値”ということになる。

5.2.7 計　　器

量を何がしかの仕方で物理的現象に表現して，この物理的現象そのもの，あるいはそれの元の状態からの変位で量を捉えるようにするというのが，計器の発想である。

このときの物理的現象の把捉は，別の量の計測という形でなされる場合もある。例えばバネばかりでは，重さは，長さが読まれる物理現象（バネの伸び）へと変えられて把捉される。また自動上皿ばかりでは，重さは，回転角が読まれる物理現象（針の回転）へと変えられて把捉される。

計器は，単位を実際に数え上げる操作である必要はない。計器の上の量表現の各様相（物理

現象）に“単位いくつ分”が何がしかの仕方で対応づけられていればよいわけである。

計器に対しては，測定値を出すことだけが求められることもあるし，測定値が出るまでの経過も併せて示すよう求められることもある。特に，計器にかければ測定値が即デジタル表示される完全にブラックボックス化した計器がいつも誰にとっても最も使い勝手がよいというわけではない。計器においては，ときに，わかり易さ（計測のメカニズムの捉え易さ）ということもそれの重要な要素になる。そこで，完全な自動化を割合廉価で実現することが可能でも，敢えてそのようにはしないということもあり得るのである。

6　数の構成，表現

6.1　数の構成

6.1.1　系　列

6.1.1.1　自　然　数

自然数とは，系列のことである。あるいは，系列の表現である。

系列とは，“ペアノの公理”に示されているところのものである。即ち，“はじめ，はじめのつぎ，はじめのつぎのつぎ，……”が系列である。そして，自然数はこの系列の表現である。

6.1.1.2　整　数

一方向に伸びる系列“はじめ，はじめのつぎ，はじめのつぎのつぎ，……”に対しては，二方向に伸びる系列が，

“……，$\overline{\text{はじめのつぎのつぎ}}$，$\overline{\text{はじめのつぎ}}$，$\overline{\text{はじめ}}$，はじめ，はじめのつぎ，はじめのつぎのつぎ，……”

と

“……，はじめの$\overline{\text{つぎ}}$の$\overline{\text{つぎ}}$，はじめの$\overline{\text{つぎ}}$，はじめ，はじめのつぎ，はじめのつぎのつぎ，……”

の二通りで考えられる。（ここで，上線$\overline{\quad\quad}$は，対称の意味。）

整数は，この系列の表現である。そして，自然数“はじめ，はじめのつぎ，はじめのつぎのつぎ，……”は，整数の部分として考えることができる――即ち，自然数を整数に埋め込んで考えることができる。

6.1.2　単位の数(かず)

“数（かず）”は，単位の数（かず）である。そして，単位の数（かず）を求める実践が，“計数”である。

“物の個数”ではあっても，計数の中では，物はすべて単位として同一化されている。その計数では，互いに異なっている物が数えられているのではなく，同一の単位の反復が数えられているのである。

単位の数（かず）は，自然数あるいは整数を使って表現される。計数は，〈系列〉という形式の応用である。――“整数を用いる計数”の概念は，互いに対称な二つの単位が考えられるという場面で成立する。（“互いに対称な単位”の意味は，一方を一回数えることが，他方を一回減じて数えることと同等になるということである。）

6.1.3　倍

6.1.3.1　比／倍，有理数(比数)

“単位の数（かず）”からつぎに“単位の数（かず）の比”を発想するとき，有理数が起こる。実際，“単位m個と単位n個の比”が有理数n/mである。

“単位m個と単位n個の比”の概念は，本来関係概念として起こっている。いまこれを，《単位m個に作用して単位n個を結果としてもたらすような作用素（＝倍作用素）》という実体概念に読む。

このとき，有理数は“単位いくつ”の延長としての“単位の倍”である。――実際，単位として考えられているUに対する有理数n/mの倍作用は，つぎのようになっている。即ち，Uに対して“単位Vがm個”と読めるようなVを定めるとき，$U=V_{\times}m$（“Vがm個”）に　$V_{\times}n$

(“Vがn個”)を対応させる作用が n/m である。したがって特に，“単位Uがn個”は“単位Uの$n/1$倍”と読み直せる。

整数の順序構造は，有理数に順序構造を導く。特に，有理数に関する“正・負”の概念を導く。

整数nを有理数$n/1$と対応づけることにより，整数は，有理数の中に埋め込まれる。またこのとき，自然数は正の有理数の中に理め込まれる。

6.1.3.2　実　　数

有理数は，実数へと発展させられる。それは以下のようになる。

実数は，《二量a，bで，a，bをともに割り切る量uが存在しないものがある》という事態を想定するときに出てくる。即ち，このような二量a，bに対してもaとbの比を考えることにして，この比を“無理数”として対象化する。このとき任意の二量に対してその比が考えられることになったわけであるが，有理数を含むこの比の概念を“実数”として対象化する。

実数のこの対象化は，無理数を特定していく形のものである必要はない。(無理数の特定は，実数の対象化とは別の問題である。)ここでの留意点はただ一つ，有理数の代数——有理数倍の代数——をそのまま延長することである。このときには“無理数”への意識さえも不要である。

こうして，実数は“単位の実数倍”の言い回しの中の“実数”であり，この概念は数（かず）に遡る。実数は，数(かず)の発展形態である。

6.2　数の表現，命数／記数法

6.2.1　自　然　数

6.2.1.1　n　進　法

自然数とは，系列{はじめ，はじめのそのつぎ，はじめのそのつぎのそのつぎ，……}のことである。このような構造のものとして機能している系列が，自然数である。機能上の構造だけが問題なのであり，見掛けの如何——各項にどのような名が与えられているか——は問類ではない。

各項にどのような名を与えるかという問題は，自然数の使い勝手の問題である。

“n進法”は，この問題に属する。それは，有限個の記号の組合せで無限にある自然数(あるいは，無限ではなくとも，生活の上で問題になる程度の大きさの自然数)を表現してしまおうというアイデアである。

“n進法”のアイデアは，“十進法”の形で自然に現れることができた。即ち，自分の指を用いて数える(指が尽くされれば，そのことを記憶／記録してはじめに戻る)という実践形態を反映した数のことばの上に，“十進法”は自ずと現われてきた。

6.2.1.2　“0”

自然数の十進数への展開を，われわれは通常

1，2，……，9，10，
11，12，……，19，20，
……

のようにする。このときには，自然数の系列{はじめ，はじめのそのつぎ，……}の“はじめ”が“1”と命名されていることになる。また“10”，“20”の“0”は外から導入した記号であり，自然数の名ではない。

これに対し，

0，1，2，……，9，
10，11，12，……，19，
20，…………

のような展開のしかたもある。“はじめ”に対し“0”の名が与えられているわけである。(例えば，コンピュータのプログラム言語では，この系列が使われている。)このときの“0”は自然数の名であり，“10”，“20”は，自然数の名“0”と“1”，“2”の組合せである。

6.2.1.3　計数の場合の自然数の展開

系列の位上がり位取り表現ということのみが問題であれば，自然数の展開として使い勝手がよいのは，

0，1，2，……，9，
(＊)　10，11，12，……，19，

20, …………

の方である。しかし，自然数の代数が問題になるときには，事情は変わる。

自然数の代数は，単位の数の代数である。

計数を

1，2，……，9，10，

(#) 11，12，……，19，20，

……

のように展開すれば，0を(加法の)零元として機能させることができる。――但し，このときの0は自然数ではない。それは外から持ち込んだ記号である（前節）。

これに対し，計数を（＊）のように展開してしまうと，(このときには0は自然数であるが)零元は存在しない。

零元の有る無しは，筆算に対して決定的な意味をもつ。即ち，零元があってはじめて，n進数は《単位位取りの表記》として扱えることになり(註)，特に，筆算の九九表が可能になるのである。――数の桁数にかかわらず筆算は同じ形式でできる。このときの形式は“九九表の適用”である。しかし計数を（＊）のように展開してしまうと，これを可能にする九九表は作れない。

したがって，自然数＝系列を計数に使おうとするときには，(#)のように展開しなければならないわけである。

(註) 計数を（＊）のように展開すると，例えば“単位1個，一つ上位の単位は無し，もう一つ上位の単位は1個”の数表記は“100”(“単位100個”)であり，これは単位位取りの表記としては扱えない。

6.2.2 整　　数

系列“……，はじめのつぎ，はじめ，はじめ，はじめのつぎ，……”としての整数（§6.1.1.2）に対しては，“はじめ”を“1”と書いて，

“……，−10，……，−1，1，……，10，……”

と表現する。ここで“0”は位取り記数法を可能にするために導入される記号であり，系列の項としての整数ではない。しかし，系列の項ではないことによって，単位の数の計算としての整数の計算では，零元として機能できることになる（§6.2.1.3)。

整数の集合 {……，−10，……，−1，1，……，10，……} を $\mathbb{Z}^*$ と書き，自然数の集合 {1，2，……，9，10，……} を $\mathbb{N}^*$ と書く。

系列“……，はじめのつぎ，はじめ，はじめのつぎ，……”としての整数に対しては，“はじめ”を“0”と書いて，“……，−10，……，−1，0，1，……，10，……”と表現する。“0”はこのときには整数であるが，系列の項としてのこの0によっては位取り記数法は実現できない。また，これを零元として機能させることもできない。

整数の集合 {……，−10，……，−1，0，1，……，10，……} を $\mathbb{Z}$ と書き，自然数の集合 {0，1，2，……，9，10，……} を $\mathbb{N}$ と書く。

6.2.3 有理数(比数)

6.2.3.1 “分　数”

各有理数(比数)は，$m \in \mathbb{Z}^*$，$n \in \mathbb{Z}$ に対する“単位m個と単位n個の比”あるいは“単位m個に作用して単位n個を結果としてもたらす倍（作用)”である。これに対してわれわれが採用している表記は，“分数”$^n/_m$ である。

6.2.3.2 小　　数

“小数”は，もともと自然数の組である。実際，この形態は，以下に示すように，単位システム（§7.1.5）で量測定したときの測定値の形態として出てくる。

十進の位上がり規則をもつ単位システム {……，U_2，U_1，U_0，U_{-1}，U_{-2}，……}で量測定した結果，U_iに対する数値がk_iであったとしよう。このとき，“……，単位U_1がk_1，単位U_0がk_0，単位U_{-1}がk_{-1}，……”のような量表現が最も直接的であるが，単位U_iと数k_iの対応：

$$\begin{array}{cccccc} \cdots\cdots, & U_1, & U_0, & U_{-1}, & \cdots\cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \cdots\cdots, & k_1, & k_0, & k_{-1}, & \cdots\cdots \end{array}$$

が読み取れるならば，

$$\cdots\cdots k_2\ k_1\ k_0\ k_{-1}\ k_{-2}\cdots\cdots$$

と，数値を並べるだけで事足りる。そこで，対応が読み取れるようにするにはどうするかということになる。

われわれが採用しているのは，単位の並び

$$\cdots\cdots,\ U_2,\ U_1,\ U_0,\ U_{-1},\ U_{-2},\ \cdots\cdots$$

を固定し，対応する数値をこの順番に並べ，そして一つの i に対して U_i と k_i の対応を明示しておくという方法である。そして“小数点”に，このときの《一つの U_i と k_i との対応》を明示する役割を担わせている。実際，一つの単位 U_0 を基準単位として固定し，それに対応する数値の右下に点を“小数点”として付すというわけである。

このような手続きから出てくる“小数”には，有理数(比数)の意味は少しも含まれていない。

“小数”は“小数倍”の概念の中で有理数(比数)と読まれることになるわけであるが，それはつぎのように定義される。

一般的な記述は煩瑣なだけなので，量Aに対する123.45倍の定義を示そう。先ず，Aから十進の単位システム$\{A_2,\ A_1,\ A_0,\ A_{-1},\ A_{-2}\}$をつくる：

$$A_0=A,\ A_{i+1}=A_{i\times}10$$

そしてこの単位システムで測ったときに測定値が123.45になる量をBとする。即ち，$B=A_{2\times}1+A_{1\times}2+A_{0\times}3+A_{-1\times}4+A_{-2\times}5$ である。このときAとBは，A_{-2} を単位として100と12345の比になっている。即ち，BはAの $^{12345}/_{100}$ 倍である。“123.45倍”はこの倍のこととして定義する。

6.2.4 実数(無理数)

実数ないし無理数の対象化は，様々な発想と工夫から為される。

例えば，数 $a\geqq 0$ に対して $x^m=a^n$ となるような数xを発想したときの $a^{n/m}$。実数が〈長さ〉という量に対する倍作用であるときに，円の直径に対する円周の長さの比を発想することによるπ。

7 単　　位

7.1 単位システム

はじめに，量(カテゴリー)を一つ固定して考える。単位に関する以下の議論は，この量に対するものとする。

7.1.1 単位の混用

単位はケース・バイ・ケースで選ばれる。“本質的”あるいは“原理的に一意”といった単位は無い。そこで，単位の混用という状態が，単位運用の自然発生的な形態ということになる。

7.1.2 単位の組

単位をその場限りではなく恒常的に用いていくことが条件になるとき，単位の精選という問題が持ち上がる。そしてそれは，《単位を知る》と《単位を使う》の二つの互いに矛盾する問題の“止場”という形で結着がつけられることになる。

《単位を知る》に関しては，単位はただ一つであるのが有難い。逆に，《単位を使う》ということになれば，一つだけの単位というのは，実用にならない。そこで単位は，《ケース・バイ・ケースの対応がある程度可能であるように色々揃っていると同時に，多くなり過ぎはしない》という要請の下に，コンパクトなセットへと精選されるというようになる。

7.1.3 単位の組合せによる量表現

単位を用いて量表現しようとするとき，それは，一般に，複数の単位の組合せという形をとることになる。実際，ある単位で“単位いくつ”を求めて余りが出れば，つぎにはこの余りに対し，いまの単位より小さい別の単位で“単位いくつ”を求めることになる；そして以下この手続きを繰り返したときの結果は，複数の単位の組合せによる量表現である。例えば，“大コップ3杯と中コップ40杯と小コップ25杯”(この言い回しでの単位の順番は自由）のような。

量のこのような表現は一意ではない。これを一意にするためには，つぎのような手続きを踏むことになる。即ち，測定値が最も小さくなるような単位で“単位いくつ”を表現し，このときの余りを，再び，測定値が最も小さくなる単位で“単位いくつ”を表現する；以下この手続きを繰り返す。例えば“２年と10か月と３週間と４日と18時間と40分と50秒”(この言い回しでの単位の順番は自由）のように。この手続きに依ったときの量の一意的な組合せ表現のことを，言い回しの簡単のために，以下単に“一意的組合せ表現”と称することにする。

一意的組合せ表現は，単位数え上げの回数が最も少なくなる測定の仕方と対応している。したがって，単位数え上げの回数だけが量測定の効率の規準になるような場合には，一意的組合せ表現に直接到達することを目指して測定するということになる（*Cf.* §5.2.3)。

また，二量の比較も，それぞれの一意的組合せ表現の間の比較という形で行うのが，実際的ということになる。

7.1.4　位取り表現

単位の組に対し，それの要素を順序づけそしてその順序を固定しておくと，単位の組合せの量表現から単位の記号を消去することが可能になる。

実際，単位の固定した系列

$\cdots\cdots, U_n, \cdots\cdots, U_2, U_1, U_0, U_{-1}, U_{-2}, \cdots\cdots$

の上では，量の表現

$U_{i1}\times k_1 + U_{i2}\times k_2 \cdots\cdots + U_{ij}\times k_j$

$(k_1, \cdots\cdots, k_j$：自然数)

に自然数の組 $(k_1, \cdots\cdots, k_j)$ を対応させることができる。この対応はこのままでは１対１対応にならないが，自然数の組の各要素がどの単位に応ずるかがわかるような記号法を導入すれば，１対１対応になる。

それには先ず，一つの単位を“基準単位”の身分で固定し，それに応ずる自然数がどれとわかるような記号法を導入する。要素の各自然数は，《基準単位の係数である自然数の右／左にいくつ目》ということで，どの単位の係数であるかがわかるようにする。そしてそのために，必要に応じて“空位”の印を挿入する。

例えば，U_0 を基準単位とし，基準単位の係数であることを $\hat{}$ をかぶせることによって示し，空白によって空位を示すことにすれば，

$$U_2\times 20 + U_{-1}\times 15 + U_{-2}\times 3 \longleftrightarrow (20,\ \ ,\ \hat{}\ ,\ 15,\ 3)$$

のように，量の組合せ表現と自然数の組の間には確かに１対１の対応がつく。

最小単位あるいは最大単位が考えられているときには，《基準単位の係数》の記号は要らない。実際，最小［最大］単位の係数である自然数は，それの位置――右［左］端――で既に示されているからである。例えば，単位の時，分，秒をこの順番に順序づけて，単位の係数を単位の順序に並べる（区切り記号は，“,”のかわりに“：”を使う）ことに決めれば，“14：36：20”に対し“14時36分20秒”と読めることになる。

要素の各自然数に対しそれを係数とする単位が補われて読まれるところのこの量表現を，“位取り表現”と呼ぶことにする。実際，この表現では，要素の自然数に補われて読まれる単位は，その自然数の〈位〉として機能しているわけである。

量の位取り表現は，単位組合せの量表現の如何に従う。したがって，量に対するこの表現は一意ではない。単位の一意的組合せの量表現(前節）に応ずる位取り表現のみをとるようにするとき，それは量の一意的表現となる。

7.1.5　単位システム

7.1.5.1　単位の組のシステム化

単位の集合は，“位上げ（位上がり)”の規則の下にシステム化しておく方が，都合が良い。

システム化されていない単位の場合，量の一意的組合せ表現（前節）は，“単位いくつ”を求めるときの単位の選択の順番が好き勝手では，到達できない。これに対し，システム化されている単位の場合には，単位選択の順番は好き勝手でよい。実際，得られた結果を計算の上で処理して，所期の組合せ表現に到達することがで

きるわけである。特に，システム化された単位の場合には,《測定値を最も小さくするような単位の選択》という〈賭け〉の実践（§5.2.3)を免れることができる。

単位のシステム化とは,《ある単位いくつが別の単位一つ》のようになっている単位の集合をつくることである。即ち,《ある単位Uの上位単位は，Uのいくつ分になっているようなもの；ある単位Uの下位単位は，それのいくつ分がUとなるようなもの》という規則に則って単位の集合がつくられる。

既存の単位が《ある単位いくつが別の単位一つ》のようになっていないときには，単位のシステム化は単位の抜本的な取り直しを含意していることになる。既存の単位をそのままにしてそれらの関係を顕在化するというやり方では，それは行なえないわけである。但し,既存の単位を完全に止める(例えば，メートル法への移行)ということをしない方法として，既存の単位に若干の修正を加えてこれをシステム化にのせていくということはできるし，また現実的である。

7.1.5.2　位上げ命数法と単位システム

単位システムは，それの位上げ規則が自然数の位上げ規則に埋め込まれるようなものになっていると扱いやすい。したがって，逆に，このような位上げ規則をもつことが単位システムの現実的な形態ということになる。

実際，このときには，単位の組合せによる量表現と《基準単位の小数倍》の形の表現の間には，直接の読み換えが可能であり，また，基準単位の異なるとり方に応ずる表現を読み換えることも，数の位をズラして読むという方法で行なえる(註)。量計算もこのときには小数計算にのることになり，はるかにやり易くなる。

(註) 例えば，長さの単位システム {km, m, cm, mm, μ}は，自然数の十進位上げ規則に埋め込まれる位上げ規則になっているが，このことによって“20500m (単位mが20500)”，“20.5km”，“単位100mが205”のような表現の間の読み換えが直接行えることになる。——時間の単位システムの {日, 時，分，秒} では，こうはいかない。

7.2　単位共同体

7.2.1　単位の公的性，単位共同体

単位(＝測定の単位)は，はじめから公的なものである。単位は，それが単位と承認・了承されている共同体（それがどのように小さいものであっても）の中で，単位として機能する。

私的な単位——即ち，単位であることのチェックを他者から〈承認〉という形で受けていない私的な単位——は，単位ではない。私的な単位とは，“単位である”という思い込み以上のものでない。“単位である”という思い込みをもつことは，単位として実際に機能しているということではない。

単位(システム)の選択はあくまでも恣意である。しかし，その単位(システム)は公的なものである。

単位は，公的である限りにおいて単位である。その場限りの単位も，単位である限り，そのときには公的である。

単位の決定は，同時に，その共同体において“合理的”な計量（生活実践）の決定である。選択された単位は，計量という生活実践——即ち，計器の作成，計量，量表示，量計算——の形態を決定する。選択された単位に応じた生活実践が，そこに展開される。

このように，一つの単位(システム)には，それを単位として生活に組み入れている共同体の概念が応ずる。この共同体は，行政や経済レベルの共同体とは,(現実には一致する場合が多いにしても）原理的に区別される。われわれは，言い回しの簡単のために，この共同体を“単位共同体”と呼ぶことにしよう。

7.2.2　単位共同体の弁証法

単位共同体の揺らぎは，論理的には，共同体それ自身の基盤の変質とか，他の単位共同体との接触という事態によってもたらされる。

このうち，異なる単位を擁する他の単位共同体との接触は，〈単位の換算〉というインターフ

ェースを通して行なわれる。そして，これはこれで生活実践として定着し得る。ここにはまだ，《単位の共有》ということへの直接の契機は見出せない。

即ち，《単位の換算》から《単位の共有》への移行は，一つの飛躍であり，この飛躍の契機を，いまの段階での《単位の換算の煩瑣》に求めることは無理である。

単位の共有の一つの形態は，一方の共同体による他方の共同体の併呑，あるいは，一方の共同体への他方の共同体の参入である。このときには，“強制”とか“力”とか“権威”とかが，キー・タームになる。

単位の共有の別の形態は，純粋に《交流の円滑化》を目的としてなされる単位の共有——共有されるべき単位の設置——である。これは，《将来の先取り》という意識でなされることもある。しかしそうでなければ，複数の単位の共存という事態が交流を難しくしているという事実が現にある，ということをそれは示している。

単位共同体の拡大には，論理的に，ゴールはない。

7.2.3 “普遍単位”

“任意単位と普遍単位”という対立図式が立てられるのを，われわれはしばしば目にする。しかし，単位は恣意であり，“任意単位”であるのみである。この対立図式は誤まりである。

この図式を，“私的な単位と公的な単位”のように読み換えることもできない。実際，単位は“公的な単位”であるのみである（§7.2.1)。

実際，“普遍単位”と言うときの“普遍”は，論理的概念ではない。この“普遍”は，それと対立する（排反する）概念を持たないのである。

“普遍の印象が持たれている単位”が，“普遍単位”の実際の意味である。

8 量　計　算

8.1 単位の数(かず）の計算

“量計算”と言うときの“計算”は，数計算のことである。“計算”を，“量の代数的構造”の文脈の中で述べられる量の“演算”と混同してはならない。二量a，bに対する“$a+b$”や量aと数ξに対する“$a_{\times}\xi$”は，“計算”の表現ではない。演算法則の

$$a+b=b+a$$
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(a_{\times}\xi)_{\times}\eta=a_{\times}(\xi\times\eta)$$
$$(a+b)_{\times}\xi=a_{\times}\xi+b_{\times}\xi$$

は，“計算”ではない。

数(すう）計算は，結局，数(かず）の計算である。われわれは，しかじかの量から一つの量を求めることを，数(かず)の計算でする。そしてこのときの“数(かず)”とは，〈単位〉の数(かず）のことである。

〈単位〉のアイデアは，量計算を数(かず）の計算として行なえるようにすることである。実際，量a，bがそれぞれ“単位m個”，“単位n個”と表現されていれば，$a+b$ の演算は，単位$(m+n)$個分を求める $m+n$ の数計算で実現される。また，$a_{\times}n$ の演算は，単位$(m\times n)$個分を求める $m\times n$ の数計算で実現される。

量計算は，このように，単位の数(かず)の計算である。

8.2 量計算の意義

数(かず)の計算としての数計算は，“数える”ことをしないで数（かず）を出す行為のことである。数計算の意義は，実際に数えなくとも／数えられなくとも数（かず）を出せるというところにある。そしてこの意義は，そのまま，数計算としての量計算の意義である。即ち，量計算の意義は，実際に測らなくとも／測れなくとも量（大きさ）を出せることである。

9 量　比　較

9.1 量比較の方法

9.1.1 “直接比較”

二量の大小比較の一つの方法は，二量の大小

が何がしかの現象で直接示されるようにすることである。例えば，同じ容器に入っている液体のかさを比較するには，容器を隣り合わせて液面の高さを比較すればよい。二つの小石の重さであれば，この小石を天秤の両皿にのせて，どちらが下に降りるかを見ればよい。

二量比較のこのような方法は，従来“直接比較”ということばで括られている。しかし，これらのうちには，《課題の量比較を別のカテゴリーの量の比較に還元する》と読めるものもあり，こうなると“直接”の意味そのものが直接問われてくる。

このときの“直接”は，しかじかの現象から結論を引き出していることについて説明は無用（アタリマエ故に説明は無用）という内容のことばと解すべきである。但し，“説明は無用(アタリマエ)”は，“誰でも説明ができる”ではなく“説明の仕様がない”を理由とするのである。この“説明は無用”は，論理ではない。それはその場の印象ないし気分である。

9.1.2 測定値の比較

二量の大小比較は，測定値の比較の形でも行なえる。このことの根拠を量(形式)の論理ということで述べるならば，《代数的構造と順序構造の両立》ということになる。

実際，測定値の比較による量比較では，暗黙のうちに，法則

$$y<z \Longrightarrow x+y<x+z$$

$$x<y \text{かつ} \xi>0 \Longrightarrow x_{\times}\xi<y_{\times}\xi$$

の適用がなされている。——二量X，Yの単位量$U>0$に対する測定値がそれぞれξ，ηで，かつ$\xi<\eta$であるとき，$U_{\times}(\eta-\xi)>0$，さらに$X=U_{\times}\xi<U_{\times}\xi+U_{\times}(\eta-\xi)=U_{\times}\eta=Y$。なおこのとき，$U_{\times}(\eta-\xi)$が$Y$の$X$との差として捉えられるものになる。

9.1.3 論理計算

論理計算——順序関係の推移法則の適用——も，量の大小比較の方法になる。即ち，二量X，Yに対し，既に何がしかの方法で得られている関係：

$$X\leqq Z_1,\ Z_1\leqq Z_2,\ \cdots\cdots,\ Z_{n-1}\leqq Z_n,\ Z_n\leqq Y$$

を媒介させることによって$X\leqq Y$を導くというのが，このやり方である。

9.2 量の序列化

二量比較の延長が量の序列化である。実際，二量比較は，二量の序列化のことに他ならない。

量の序列化についても，“直接”的方法，測定値の序列化による方法，論理計算による方法が，考えられる。