算数科“図形”領域教材研究——“空間”の教材化(2)

宮下　英明・卜部　義夫*・長島　莞一**・松島　修***

On Informal Geometry in Elementary School Mathematics——“Space”(2)

Hideaki MIYASHITA, Yoshio URABE, Kan'ichi NAGASHIMA, Osamu MATSUSHIMA

目　次

1　“同型”の指導

1.1　“同型”の主題としての“合同”,“相似”,“対称”

“合同”,“相似”,“対称”は,“(ユークッド空間の)同型”の各論である。われわれはこれらを,算数科の教材としても,“同型”の各論として取り上げることを試みるとしよう。

以下“同型”のことばで,“合同”,“相似”のそれぞれ,あるいは両方を指すことにする。

1.2　ユークッド空間の扱い

平成元年9月16日受理

* 金沢市立材木町小学校　** 金沢市立額小学校　*** 金沢大学教育学部付属小学校

“同型”の主題は，ユークッド空間の主題の中にある。しかし，ユークッド空間に関する構造の概念は，算数科では明示的には何一つ出せない――少なくとも，発展する文脈を用意できないという意味で。

子どもが実践においてユークッド空間の論理に従っているという事実は，その論理の彼らに対する明示が可能であることを意味しない。

われわれは空間を対象化させるために，ぎりぎりの表現として“点で成る；無際限”を用いていく。

1.3　“同型”の指導内容

“同型”の主題の指導内容になるものは，大きくはつぎの二つである：

・“同型”の概念――但し，“空間の自己同型”の概念で記述されるところのものとして。

・同型の含意となることがら。

なお，ここでは“合同”，“相似”，“対称”のそれぞれの場合の“空間の自己同型”の言い回しとして，“等長変換”，“相似変換”，“対称変換”を用いる。

1.4　指導の流れ

≪同型な二つの絵［“対称”の場合は，自己同型な一つの絵］に対しそれの同型［自己同型］の解釈(理屈づけ)に取り組ませ，そして空間の自己同型の概念に到達させる≫という指導の流れを，ここでは考えていく。“絵の同型［自己同型］の特徴づけ”という問題の解決という形をとって，同型の概念の指導に入っていくわけである。

この問題は，同型な二つの絵が“空間の或る自己同型Fに対し$F(\mathscr{X})=\mathscr{X}'$であるような部分$\mathscr{X}$，$\mathscr{X}'$”として特徴づけられて，結着を見る。

1.5　同型な絵の類化

“仲間づくり”の課題の下に，互いに同型な絵［自己同型な絵］が類化されるよう導く。

算数科において，“仲間づくり”は新しい概念を導入するときの常套手段である。それは，外延を先ずつくらせておいてつぎにこれの内包を考えさせるやり方のことである。そしてここでも，これを用いて同型の概念の導入を図る。

1.6　身体性

互いに同型な絵［自己同型な絵］を類化すること，あるいはこの類化を示されれば了解できることが，子どもに可能であるということを，指導の前提にする。――これが可能でなければ，同型の主題は最初から立たないという意味で。子どものカラダの傾向としての互いに同型な絵［自己同型な絵］の類化が，指導の前提になる。

ここで“カラダの傾向”と言うとき，われわれはさらにつぎのように考えているのである：“理由によって類化できたのではない。理由はあとからつけられる（でっち上げられる)。”

1.7　同型な絵の類化の理由づけ

自分の為した類化に対する子どもの理由づけは，凡そつぎの三つのタイプになる。即ち，感覚的なもの，構造的なもの(“同じ”)，そして操作的なもの(“重なる”)である。

このうちから，われわれの目的(“点対応の見方に導く”)に合うところの後の二つを残す。

但しここで，操作的な理由づけ――これは素材の特殊性に依存している――によって却って“同型”の一般的形式（本質）が見えなくなってしまうということに，われわれは十分留意していなければならない[註]。

操作的な理由づけを退けようとするならば，このような見方がはじめから出ないような素材（ディスプレイ上の絵，黒板に描かれた絵，竹ひごや粘土玉で描かれた絵，等）を考えればよい。但しわれわれは，方便の意味で，操作的な理由づけは退けない。

(註) 特殊(“簡単な場合”)で考えることには，一般的形式(“本質”)が隠蔽される危険が伴う。あくまでも≪特殊の中に一般的形式(“本質”)を示す≫とい

うのが指導の本筋である。このために指導者は，それぞれの教材についてそれの一般的形式(“本質”)が何であるかを自らの教材研究において明らかにしている必要がある。

なお，同型を対象操作的にではなく“点対応”のことばで述べることは，実践的には,操作ができなくとも——あるいはそれをしなくとも——同型な図を作成できるというところに効いている。

1.8 自由曲線の図

素材の絵は，自由曲線とする。同型［自己同型］であることの記述概念として空間の自己同型しか残されていない絵(註)という意味で，空間の自己同型の主題化が本質的となる素材だからである。

(註) 線分で構成されている図や，有限個の点の図は，同型［自己同型］であることの記述を特定の点の間の距離や角の大きさの記述で代えることができる。

1.9 問題意識の形態

“同型”の課題は，本来，“同型をどのように言い表わすか？”である。即ち，表現のための概念装置の問題である。これに対し，ここでの実際の指導は，“同型はどうなっているか？”の問題意識へ導こうとしている。

1.10 絵の上の点対応の導入

“同型［自己同型］はどうなっているか？”の問題意識をもたせた上で，この意識の下に，同型［自己同型］の点対応を絵の上につくらせていく。

点対応は，“重なる”からつくっていくのが易しい。——点対応を現わすための方便として，“重なる”をここでは退けない。

“同じ”から点対応をつくるのは，“同じ”を細かく見させるというやり方で行なう。即ち，“ここどこ？”のような教師の誘導的な発問で，“同じ”を“対応する部位”，そして“対応する点”に変えていく(註)。

同型の形式を直接表現することのできるのは，後者の方である。——最終的には退けなければならない“重なる”を点対応の導入に用いるというのは，方便とは言え，不自然である。

(註)勿論，このやり方では点対応は確定されない。しかし，本来点対応は確定されないのである。点対応は，図の事実ではなく，われわれの恣意である。“重なる”も恣意である。“重なる”から導いた点対応に，“確実”の意味合いは何もない。

1.11 対応規則の言表

点対応を現出させることをしたら，つぎにすることは，この点対応の決まりを考えさせることである。対応づけが現にできているということと，そのきまりをことばにして持っているということとは，別である。ここでの課題は，自らの実践にことばを与えることである。

1.12 空間の自己同型

互いに同型な二つの絵の間の点対応［自己同型な一つの絵の上の点対応］を，空間の自己同型に埋め込む。

1.13 同型の関係

空間の部分に関する同型の関係——空間の自己同型で互いに他に写る関係——の概念を導入する。

1.14 同型な対象の特徴づけ

≪逆に，この関係概念が立つ二つの対象は同型に見えてしまう/捉えられてしまう≫という事実——身体性——の認識。

この関係概念を，日常語の“同型”の（数学的）定式化ということにする。

1.15 日常語の“同型”と数学的概念としての“同型”

“同型”の日常語的表現（例えば，“相似”の

場合の“形が同じで大きさが違う”）と数学的表現とのギャップ――そして，それが意識にもたらす違和感，疎外感――の確認。

1.16 同型な図の作成

絵$\mathscr{X}$に対し，空間の自己同型Fを一つ定めて，$\mathscr{X}$と同型な絵$F(\mathscr{X})$を作図する。これは，空間の自己同型を道具として使うことの指導である。

1.17 “基本図形”における同型

同型指導の最後の局面として，“基本図形”に対して“同型”を主題化する。

現行では，“同型”は専ら“基本図形”――三角形，四角形，円――ないしそれの組み合せになる図に対して主題化されている。しかし“基本図形”においては，同型［自己同型］は――辺の長さ，内角の大きさ，半径の長さ，等のことばを用いた――特有な形で特徴づけられる。そしてこの特徴は，“同型”の本質を隠蔽する。それは，“同型”一般を展望させない。“同型”一般がこれによって疎外される。（逆に，“同型”一般からは，“基本図形”にいつでもアプローチできる。）“基本図形”に関する同型の主題を同型の指導の最後にもってくるのは，このためである。（*Cf.*§1.8）

1.18 “空間図形”の同型

“同型”を，“空間図形”(註)に対しても簡単に主題化しておく。

“空間図形”の場合実際には不可能な“重ねる”操作を，観念的に想念できるようにすること。

（註）“三次元ユークッド空間の部分として考えていて，同じ空間の二次元部分空間には含まれない図”の意味で，“空間図形”の語が日常的に用いられている。

1.19 色々な“同型”

異なる“同型”（“合同”，“相似”）を，一方を他方に対して相対化する形で取り上げ，生活の中の“同型”がケース・バイ・ケースであることを了解させる。

2　合同

2.1　指導内容および考察

≪“合同”の指導内容および考察≫は，*Ch. 1*(≪“同型”の指導≫）の“同型”を“合同”に読み換えたものに，さらに以下を付加したものである：

2.1.1　合同な絵に対する理由づけ（§1.7）

合同な絵の類化に対する理由づけは，“同じ”か，操作的な理由づけの“ぴったり重なる”である。但し，合同の意味は“同じ”であり，“ぴったり重なる”は，合同の規準である。“ぴったり重なるから合同”とわれわれが言うとき，それは，“ぴったり重なる”が合同の意味だからではなく，合同の規準である“ぴったり重なる”が満たされたからである。

合同な絵に対する日常的な表現は“同じ”であり，現行の指導にある“形・大きさが同じ”ではない。現行の指導でこの非日常的な言い回しが使われているのは，“相似”が意識されているからである。しかし，“形・大きさが同じ”は非日常的であるばかりでなく，非数学的でもある。これは算数科の因習的な言い回しの一つである。われわれはこれを継承しない。――この方便を必要としないという意味で。

2.1.2　対応規則の言表（§1.11）

対応規則の言表としてわれわれが用意するものは，

“点X，Yにそれぞれ点X'，Y'が対応するとき，$\overline{XY}=\overline{X'Y'}$”

である。

2.1.3　“合同条件”

ある種の平面図形では，等長変換を直接持ち出すことなく，合同を特徴づけることができる。

例：

(1) 二つの正n角形は，一辺の長さが同じであれば合同。

(2) 二つの円は，半径が同じであれば合同。

(3) 二つの長方形は，隣り合う二辺の長さがそれぞれ同じであれば合同。

(4) n角形一般については，合同の判定が“辺長と内角の大きさの比較”の形で行なえる。

(5) “三角形の合同条件”

2.2 指導実践

1の1時

主題

合同な図の類化

指導

(1) 合同な3つの図とこれらに合同でない3つの図を交ぜて展示し，これらの中から仲間を抽出することを，課題として出す。

図は，開いた自由曲線とする。

発問：“同じ仲間と見えるものがありますか？”

合同な図の類化を残し，他を退ける。

類化した自分の考えを述べさせる。

色々なタイプの表現の中から，“同じ，“ぴったり重なる”を誘導し，残す。

“ぴったり重なる”について，これを確かめる。

“同じだからぴったり重なる；ぴったり重なるから同じ”

裏返しで合同の図を加え，これを同類とするかどうかを問題化する。

(正しい・正しくないではなく) 約束として，裏返しで合同も“同じ”とする。

“同じ，“ぴったり重なる”に同義のことばとして“合同”のことばを与える。

まとめ：“図の仲間に，合同な図の仲間がある”

解説/留意事項

(1) 数学的に定式化された“同じ”に対して“合同”の語を与えることも考えられる。但し，“合同”の語のこの二通りの導入の仕方は，思想を異にしている。

前者では，日常語と数学の異なる二つの用法をもつ語として“合同”が与えられたことになる。後者では，非日常語として“合同”が与えられたことになる。

われわれは，日常語と数学を異なる言語ゲームとして強調する立場から，前者の方を選ぶ。

(2) “ぴったり重なる”を“同じ”の規準として使うことで，裏返しで合同も“同じ”とする約束を了解させる。

1の2時

主題

合同の構造の課題化

合同の点対応

指導

合同の構造を，問題意識として喚起する。

“合同な二つの図にはどんなきまりがあるか？”

“どんなきまりにある二つの図が合同になるか？”

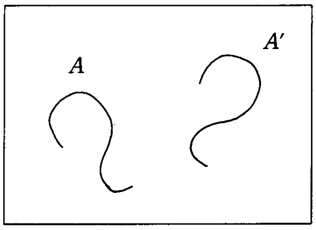
合同な図のきまりを課題化する。

板書：“合同な図のきまりを見つけよう”

合同な二つの図（先に類化された図と同じもの）が描かれているB3版の紙(S)を黒板に貼付。

二つの図には，A，A'と記号をふる。

課題としては明示しないが，≪点対応の見方による“重なる”の見直し≫と≪“空間”の導入≫の主題に，ここから入る。



誘導：“重なりを詳しく見てみよう！”，“どことどこが重なるの？”

この問いかけから，“点と点”の重なりの認識に導いていく。

“この点にはこの点”

重なる二点に対し，“対応する点”の言い回しを与える。

“対応がわかるように，しるしをつけよう”

点の対応を表示する作業（教師）

方法：

（i）二枚のB 3版OHPシートを用意する。紙Sの上に，OHPシート（P）をぴったり重ねてのせ，図Aをコピーする。同様に，図Bをもう一枚のOHPシート（P'）にコピーする。（記号S, P, P'は，指導の流れを書いているここでの記述の都合のためのもので，おもてには出すものではない。）

（ii）シートPの上の図Aに点アをプロットする。但し，図を描いた面の反対の面に点を描く。図A'が図Aとぴったり重なるように，シートP'をシートPの上に重ねる。但し，図を描いた面の反対の面が上になるようにする。点アをコピーし，ア′と記号をふる。

同様のことを何回か続ける。

（iii）シートP, P'をもとのSの上にぴったり重ねることで，合同の点対応を示す。

まとめ：“合同な図の間に点対応がつくれた”

解説/留意事項

シートP, P'において図と点の書き込みを別の面にするのは，図を消去して点の対応のみを見させる場面を１の３時に用意しているからである。

１の３時

主題

“空間”の語の導入

指導

(1) 図A, A'の上の合同の点対応を，シートP, P'の上に拡張する。

誘導：“重なっている点は，他には考えられないの？”

(2) Pの点がP'にコピーできない場合を問題化する。

“対応する点はないの？”

“この紙はどこまでも広がっていると考えよう！”

(3) 紙Sに対して，“点でビッシリしきつめられている”というイメージをもたせる。

(4) “空間”の語の導入。

“いま，この紙を，点でビッシリしきつめられ，どこまでも広がっているものと考えました”；“このように見ることを，空間として見ると言います”；“こういう見方をしたものが空間”

日常語の“空間”と比べたときの，このときの“空間”に対する違和感をとり上げる。

“算数の空間には，空っぽといった意味はない（逆に，点でビッシリ）”

解説/留意事項

(1) “空間”を導入しようとする本時の内容は，合同の主題からは一時外れる。

(2) シートP, P'は，あくまでも点対応をつくるための補助である。これが空間として意識されることないように努めること。

(3) “空間”が見方であることを，努めて強調する。

(4) Sに対する“空間”の解釈の下にはじめて，図A，A'の無限点集合としての解釈が立つ。そしてこの事実を子どもにおろすことはできない。したがって，前時での図A，A'の間に点対応をつくる課題においては，A，A'についての“無限点集合”のイメージの問題に進まないようにしており，本時でも敢えて触れないようにしている。

1の4時

主題

合同の点対応のきまりの課題化

指導

(1) “合同な図のきまり”を，“合同の点対応のきまり”として考えていくことを，了解させる。

“合同を点対応で見ることができた”；“この点対応に何かきまりはないか？”

前時の素材を引き続き用いる。

(2) シートP, P'に描かれている図A，A'を消去し，点対応のみが表示されるようにする（表示される点の数はそれぞれ4つくらいとする)。

点対応にきまりを見つけさせる。

点の対応のきまりとして，≪距離の保存≫を見出させる。

言い回し：“対応する距離がいつも同じ”

(3) 空間に拡張した点対応について，きまりを問題化する。

同じきまりにあることを確認させる。

“距離を変えない点対応”の言い回しを導入する。

解説/留意事項

“距離を変えない点対応”のことばで，等長変換を対象化させる。

1の5時

主題

(1) 空間の部分に関する関係概念としての合同

(2) 合同な図の特徴づけ

指導

前時で素材になった等長変換を，ひき続き素材として用いる。

一つの図を与え，等長変換によるこれの像を課題として出す。

“この図の点に対応する点をかいてみよう”；“どんな図ができあがるか？”

“できあがった図の点に対応する点は，どんな図をつくるか？”

結論：“距離を変えない点対応で，合同な図ができる”

“今度からは，合同な図の意味を，距離を変えない点対応で対応する図のこととして，ぴったり重なるという言い方はやめよう”；“重ねることができないものにも，合同が言えるようになるから”

解説/留意事項

合同の“性質”のように扱ってきたきまりを合同の“規準”の身分に変えることが，本時の主題である。

2の1時

主題

等長変換の決定——平面の等長変換が，一直線上にはない三点の写る先で決まってしまうこと。

指導

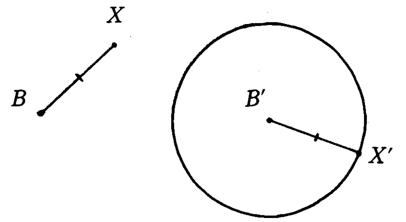
(1) 1の2時の素材を再び取り出して，シートPの図AとシートP'のA'を重ねるとき空間の点対応がいっぺんに決まってしまうことを，確認させる。

図AとA'を一点のみの図BとB'に変える。

BとB'に対し，これを重ねるとき空間の対応がいっぺんに決まるという具合にはならないこ

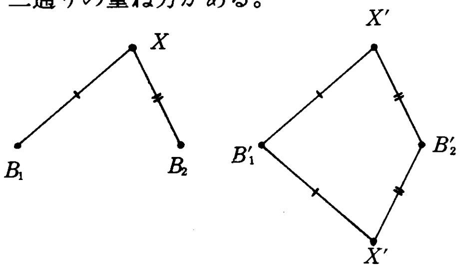
とを，確認する。

“何通りもの重ね方がある。”



二点の図の場合についてはどうか，考えさせる。

“二通りの重ね方がある。”



（一直線上にはない）三点ではどうか，考えさせる。

“一つの重ね方しかない”，“一通りに決まってしまう。”

(2) シートP, P'を重ねることの意味が，距離を変えない点対応の決定であることを，理解させる。

“シートP, P'を重ねて，重なる点の対応をつくると，それは距離を変えない点対応になっていました。”

“重ね方を変えると，別の点対応になりますね。”

(3) まとめ：“（シートを重ねることは距離を変えない点対応を一つ決めることだから）距離を変えない点対応は，三点とこれに対応する三点を決めたら，決まってしまう。”

解説/留意事項

本時の主題は，非常に高度である。

主題をつかませながら進める指導は以下に示すようなものであるが，これは内容が高度に過ぎる：

“等長変換をつくってみよう”

“距離を変えない点対応を，示すにはどうしたらよいか？”；“何をすることが，つくること？”

“距離を変えない点対応で対応する二つの図を表示するしかない”

“どんな図をかこうか？”

“合同の絵ならなんでもよい”；“したがって最も簡単な絵で済ますのがベストだ”

“一点だったら決まらない”

“二点でも決まらない”（正と反の二通り）

“三点で決まる”

“三点でなる図が，一番簡単な図”

２の２時

主題

合同な図を，等長変換の像として求める

指導

“距離を変えない点対応”を，合同な二つの三点図を指定する形で与え，さらに，一つの図を与える。

“この点対応で，この図はどこにうつるか？”

“作図できるか？”

作図の論理を問題にする。

“三点との距離で点が決まる”

作業の見通しをもたせる。

コンパスと定規を用いて作図

解説/留意事項

(1)　作図の仕方：

一直線上にはない三点X_1，X_2，X_3と，それのうつる先X_1'，X_2'，X_3'を

$$\overline{X_iX_j}=\overline{X_i'X_j'}\quad (i,j=1,2,3)$$

であるようにとる；

絵の任意の点Xに対して，Xの写る点X'を

$$\overline{XX_i}=\overline{X'X_i'}\quad (i=1,2,3)$$

であるように作図する．

(2) 素材の図は，簡単な自由曲線。
(3) 本時の作業を課すことで，合同の構造を再認識させるとともに，理解を強化する。

2の3時

主題

合同な図を，任意の位置，任意の傾きで描く。

指導

“これと合同な図をこの辺に描くには，どのような点対応にしたらよいか？”

“さらに，合同な図をこのくらいに傾けて描くには，どんな点対応にしたらよいか？”

“これで本当に大丈夫かどうか，実際に描いて確かめてみよう？”

2.3　指導時間表

1	1	合同な図の類化
	2	合同の構造の課題化 合同の点対応
	3	“空間”の語の導入
	4	合同の点対応のきまりの課題化
	5	空間の部分の関係概念としての合同 合同な図の特徴づけ
2	1	等長変換の決定
	2	合同な図を，等長変換の像として求める
	3	合同な図を，任意の位置，傾きで描く

3　相似

3.1　指導内容および考察

≪“相似”の指導内容および考察≫は，*Ch.1*（≪“同型”の指導≫）の“同型”を“相似”に読み換えたものに，さらに以下を付加したものである：

3.1.1　相似な絵に対する操作的な理由づけ（§1.7）

相似な絵に対する操作的な理由づけは，“二つの絵の平行な位置関係で，ぴったり重なって見えるものがある”。

3.1.2　対応規則の言表（§1.11）

対応規則の言表としてわれわれが用意するものは，

“点 X_1, X_2, Y_1, Y_2 にそれぞれ点 X_1', X_2', Y_1', Y_2' が対応するとき，

$\overline{X_1Y_1} : \overline{X_2Y_2} = \overline{X_1'Y_1'} : \overline{X_2'Y_2'}$”

である。

3.1.3　“相似条件”

ある種の平面図形では，相似変換を直接持ち出すことなく，相似を特徴づけることができる。

例：

(1) 二つの正n角形は相似。
(2) 二つの円は相似。
(3) 二つの長方形は，隣り合う二辺の長さの比が同じであれば相似。
(4) n角形一般については，相似の判定が“辺長の比と内角の大きさの比較”の形で行なえる。
(5) “三角形の相似条件”

4　対称

4.1　指導内容および考察

≪“対称”の指導内容および考察≫は，*Ch.1*で一般的に述べたことに，さらに以下を付加したものである：

4.1.1　指導内容（§1.3）

指導内容は，“対称”の概念と，

・対称変換が合同変換であること；このことの含意となることがら。

4.1.2　自己対称な絵からの導入（§1.4）

自己対称な絵から導入する方法に対しては，

規則的な点対応として直接対称変換を導入し，そして対称変換の応用として“自己対称な絵”を指導の最後にもって来る方法も考えられる。

しかしここでは，子どもの意識の自然な流れということに配慮して，≪絵，そしてそれの背後の空間≫と進む方を採る。

規則的な点対応として直接対称変換を導入する方法については，§4.1.16で簡単に触れることにする。

4.1.3　自己対称な絵の類化（§1.5）

自己対称な絵を何かしら特徴的な絵として感受させる。実際には，自己対称な絵とそうでない絵をいくつか展示し，“仲間づくり”の課題の下に自己対称な絵が類化されるよう導く。

素材については，類化において紛れのないものを精選するということが，留意点になる。後に控えている指導内容の難しさを考えるならば，この段階で殊更に紛れをつくって子どものアタマを悩ませるというようなことは，しないほうがよい。

4.1.4　自己対称な絵の類化の理由づけ（§1.7）

感覚的，機能的な理由づけとして“整っている”，“バランスがいい”，構造的な理由づけとして“相対（向き合っている）”，そして操作的な理由づけとして“折って/回して重なる”。

4.1.5　“180°回転して重なる，“折って重なる”（§1.7）

“点対称”と“線対称”を“180°の回転で重なる”，“折り返しで重なる”という形で特徴づけて終わる指導——現行の指導——を，われわれは退ける。

“点対称”は，〈2次元〉という特別な場合にのみ，“180°の回転で重なる”と同じになる。“折り返しで重なる”も，3次元空間で考えられた2次元の部分(絵)に対してしか意味をもたない。

操作的な説明で終始する指導によって一般的形式(本質)が見えなくなってしまう例として，“点対称”を“α°の回転で重なる”の一特殊のように受け取ってしまうということがある。

4.1.6　線対称から点対称へ

現行の指導通り，ここでも線対称から入って，つぎに点対称に移る。類化のし易いものの方から始めるという理由からである。

4.1.7　絵の上の点対応の導入（§1.10）

対称変換の点対応を絵の上につくらせる。このときどのような誘導が考えられるか。差し当たってつぎの二つが考えられる。一つは，“相対(向き合っている)”の認識から入るやり方，そしてもう一つは，“折って/回して重なる”から入るやり方である。

このうち，対称の形式を直接表現するとともに，点対称，線対称の形式的類似と差異を自然に示すことのできるのは，前者の方である。——最終的には退けなければならない“折って/回して重なる”を方便として導入に用いるというのは，何と言っても，不自然である。

指導の難易ということで言えば，線対称は“折って重なる”で入る方がやり易い。しかし，線対称を“相対”で入っておくと，点対称への移行はなめらかになる。“折って重なる”で線対称に入った場合には，点対称ではまた新たに主題を起こすという感じになる。

4.1.8　“折って/回して重なる”から入る場合

対称変換の点対応を現わすことを容易にし，また“対称軸”，“対称の中心”の導入に労力を割かないための方便として，“回して/折って重なる”をここでは退けない。

“対称軸”，“対称の中心”は，それぞれ“折り目”，“回転の中心”として，点の対応づけの作業時には既に現前している。したがって，“対称軸”，“対称の中心”を見出すことが，このときには課題でなくなっている。

4.1.9 “相対”から入る場合

4.1.9.1 “相対する点”

線対称の場合には，一先ず，“左右相対”を誘導する(註)。そしてつぎに，“左右相対”を細かく見ていくという形で，絵の上の点対応を現出させる。

“左右相対”は子どもの意識では“左半分全体と右半分全体の相対”であるが，これを“ここにはどこ？”という教師の誘導的な発問で，“相対する部位”，そして“相対する点”に，変えていく。

つぎの点対称では，線対称の学習時の経験から，子どもは“相対する点を対応づける”を最初から目的意識として持てることになる。

(註)“左右相対”よりも“左右同じ”が出易いが，“左右同じだが左右相対ではない”場合を知らせていくことで，“左右同じ”を“左右相対”へと導くことができる。

4.1.9.2 “対称軸”，“対称の中心”の発見の課題化

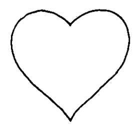
“対称の中心”および“対称軸”を，(相似の意味の“同じ形”のように)〈見える〉ものと考えるのと，〈強いて見る〉ものと考えるのとでは，指導形態が異なってくる。

〈見える〉が身体性(カラダ)の事実であるのに対し，〈強いて見る〉はアタマによる作為ということになる。そこで，前者において見えているものの確認で済むところを，後者では〈発見〉させる手立てを考えることが必要になる。

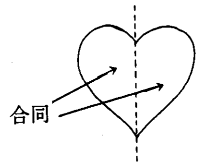
われわれは，ここでは，“対称軸”がはじめから子どもに見えてくることは予定しない。即ち，カラダの傾向としてこれを予定することは，しない(註)。

(註) なお，“対称の中心，“対称軸”の見やすさ／見にくさは，素材によっても違ってくる。

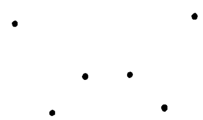
例えば，



のような自己線対称の絵に対しては，



のような見方を導くことは難しくない。しかし，同じ自己線対称の絵でも



となると，(“合同”が点図に対しても指導されていると仮定しても）先のようなパターンで“対称軸”が出て来ることは期待しにくい。

4.1.9.3 “対称軸”，“対称の中心”の発見への誘導

自己対称な絵の上の点対応から“対称軸”，“対称の中心”を浮かび上がらせるために，以下のような手続を踏む(註)。

ディスプレイ上で，絵の上の点対応を継時的に見せる。

絵を消去して点対応の表示のみにする。

二点の対応を繰り返し見せた後，一点を画面から消去して，この消去した点の位置を当てさせる。

子どもの理由づけとして，“これと反対のところ”のようなことばが出てくる。

“反対”の規準を問うことで，“対称軸”，“対称の中心”を子どもから引き出す。具体的には，“反対”の規準の“真ん中”として二点の中点に着眼させ，その軌跡として，線対称の場合には“対称軸”，点対称の場合には“対称の中心”

を発見させる[註]。

まとめはつぎのようになる：

点対称の場合には

“対応する二点の中点は同一の点(即ち,不動)”

そして線対称の場合には

“対応する二点の中点は直線を描き，しかもこの直線は二点を結ぶ線分に対し垂直”

(註) これは,“対称軸”,“対称の中心”を,〈発見〉という跳躍によってではなく,〈観察〉の結果として得られるようにする手立てである。

4.1.10 対応規則の言表（§1.11）

対応規則の言表としてわれわれが用意するものは,

点対称の場合には

“一点Oが存在し，互いに対応する任意の二点X, X'に対しOはX, X'の中点になる”

線対称の場合には

“直線Lが存在し，互いに対応する任意の二点X, X'に対し，Lは線分XX'の垂直二等分線になる”

である。

なお,“相対”から入る指導法では，この言表は，§4.1.9.3での言表を裏返す形で[註]引き出す。

(註) 一般に,“対応する二点の中点の軌跡”は対応そのものを特徴づけない（説明しない・決定しない）が，ここでの点対称と線対称の二つの場合には,“対応する二点の中点の軌跡”が対応を特徴づけるものになっている。——実際,“中点の軌跡”が対応の特徴づけになる場合は，その軌跡が一点か直線（一般に,超平面)の場合に限られてしまう。このところにも，対称変換の意義があると言える。

4.1.11 点対応から変換へ

自己対称な絵が(ある規則の下に)互いに対応している点の対の集合として捉えられるようになったいま，つぎにすることは，この点対応を絵の変換(自己写像)として読み直すことである。

即ち，対称な関係にある点の対X, Yを，対称変換$F(X)=Y$の形に読ませる。

$F(X)=Y$と読まれたX, Yに対しては$F(Y)=X$でもあることを，了解させる。——Fが（絵の一つの半分からもう一つの半分への写像ではなく）絵のそれ自身への写像であることの強調[註]。

(註) したがって，線対称のアナロジーとして鏡像を用いる場合，鏡像の概念を拡張することが必要になる——即ち，鏡の各側を互いに逆の側に写す“両面鏡”として。

4.1.12 空間の対称変換

絵の上の対称変換を空間の対称変換に埋め込む。

対称変換は，対称軸，対称の中心が任意の位置で考えられるように——特に対称軸の場合には，それが任意の傾きで考えられるように——指導する。

4.1.13 対称の関係

点および空間の部分に関する対称の関係——空間の対称変換で互いに他に写る関係——の概念を導入する。

4.1.14 対称と合同

対称変換が等長変換(合同変換)であることを，主題化する。

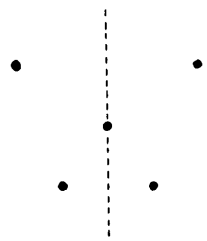
強調しておくが，これは，互いに対称な二つの部分$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$が合同であることの指導ではない。≪互いに対称な二つの部分$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$は合同≫は，対称変換が等長変換であることの含意として指導することになる。

また，≪互いに対称な二つの部分$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$は合同≫を，導入課題の“自己対称な絵の特徴づけ”と混同してはならない。自己対称な絵を“合同な二つの絵でなる”と見ることはできるが,“合

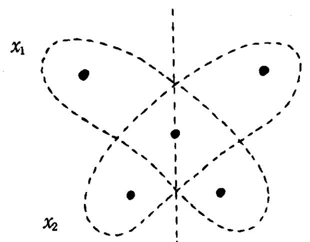
同な二つの絵でなる”ことが“自己対称な絵”の意味なのではない。

指導では，例えば線対称の場合,“合同な二つの絵”の見方は“右と左”だけでないことを確認させる。

例えば，自己線対称な$\mathscr{X}$:



に対する，



のような見方。特に，$\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$として$\mathscr{X}$自身がとれること。

4.1.15 自己対称な図の作成

相互対称な二つの絵$\mathscr{X}$,$\mathscr{X}'$に対し，$\mathscr{X}\cup\mathscr{X}'$は自己対称な絵になっている。特に，対称変換$F$と一つの絵$\mathscr{X}$から，自己対称な絵が

$$\mathscr{X}\cup F(\mathscr{X}')$$

によって得られる。

自己対称な絵のこのようなつくり方の指導は，対称変換を道具として指導するものとして位置付けられる。

4.1.16 対称変換を直接導入する指導法

空間の変換としての対称変換を直接導入し，そしてつぎに，対称変換で特徴づけられる(説明できる)絵として，自己対称な絵の主題に入る。

4.1.16.1 点対称から線対称へ

現行の指導では，対称は線対称から入って，点対称は後に来る。(“自己対称な絵”からではなく直接“対称変換”から始める）ここでの指導では，点対称から入る。簡単な構造の方から始めるという理由からである。

実際，線対称には，二点に関する点対称の形式“$\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=0$”が含意されている。

4.1.16.2 点の対の運動

(空間の変換のグラフの意義をもたせた(註1))“点の対の運動”を導入にする。

即ち，二点X, X'を，互いに対称になっている色々な布置で表示し，対応：

$$X \longmapsto X'$$

の規則を課題化する。——このとき，XとX'の身分の違いを，色の違いで表現しておく(註2)。

なお，この指導法では，点対称と線対称を指導の各段階で互いに比較しながら指導していくというやり方がとれる。——“対応の規則”の課題のところでは，“これと反対のところに対応する点がくる”の認識に対して，点対称の場合の“反対のところ”と線対称の場合の“反対のところ”を区別できる言い回しを考えさせることから，“対称の中心”，“対称軸”を同時に誘導できる。

(註1)ディスプレイ上の点(ドット)の対X, X'の運動は，つぎのように受け取られているとき，“空間の変換のグラフの意義をもつ”とする。即ち，ディスプレイが“空間”として受けとめられ，そして“Xが例えば画面のこの位置に表われるならばX'は画面のこの位置に現われる”という考え方がされていること。

(註2）例えばつぎのようにする。即ち，パソコンのディスプレイの上で，二点(ドット)を対称の色々な布置で次々と表示していく。このとき，各々の対応を同時にではなく，短い時間間隔をおいて個々に表示するやり方をとる。対応する一点には，例えば黄と水色というように色をつけておく。そして子どもに，これらの対応にきまりを見出すよう促す。

なお，布置の変化は，(跳び跳びではなく)連続にした方が課題として易しくなる。

4.1.16.3 自己対称な絵

対称の関係にある二点の軌跡を表示する形で，自己対称な図を現わす。

このときには，離散な点図にすることも，点を連ねて線図にすることもできる。“右と左”，“上と下”のような二つの部分に図が分けられてしまうことを退けたいならば，離散な点図を選べばよい——この図に対して見出されるものは，二色の点の対応規則だけであるから。

4.3　指導実践

4.3.1　線対称

１の１時

主題

自己線対称な図の類化

指導

自己線対称な図とそうでない図をそれぞれ３つずつ展示し，これらの中から仲間を抽出することを，課題として出す。

図は，単純な自由曲線とする。閉じた曲線（ハートなど)，開いた曲線をとり混ぜる。

発問：“同じ仲間と見えるものがありますか？”

自己線対称な図の類化を残し，他を退ける。

類化した自分の考えを述べさせる。

色々なタイプの表現の中から，“向き合っている”，“折って重なる”を残す。少なくとも“折って重なる”を出しておく。

まとめ：“図の仲間に，折って重なる図の仲間がある”

１の２時

主題

自己線対称な図のきまり

指導

自己対称な図のきまりを課題化する。

板書：“折って重なる図のきまりを見つけよう”

仲間の代表として自己線対称な図を一つ取り上げる。

“左右合同”の応えに対しては，“折って重なる”と同じであるとして，これを退ける。

既習（合同，相似）の想起から，点対応の見方による“重なる”の見直しに導く。

この反応が期待しにくいときには，改めて“どことどこが重なるの？”の問いかけを行ない，“点と点”の重なりの認識に導く。

課題を，“折って重なるときの点対応のきまり”という形にする。

“折って重なる”の点対応を，いくつかの点を図上にプロットして，視覚化する。これらに対して，きまりを探らせる。

一旦，“折り目を真ん中にして，反対の側に同じ距離”の結論に導く。

きまりの表現としてこれが不備なことに気づかせる。

この表現に，“二点を結ぶ線分と折り目の直線が直交する”を加えて，きまりの表現を完成させる。

対応する二点に対する表現として，“対称”のことばを導入する。折り目の直線に対して，“対称軸”のことばを与える。

二点に関する“折り目の直線を対称軸にして対称”の言い回しを導入する。

解説/留意事項

点対応の確認では，左から右，右から左の二方向を等しく示す。

１の３時

主題

(1) 図の上の対称の点対応を，空間の部分の上の点対応と読み直し，さらにこれを空間の上の対称の点対応に拡張する。

(2) 空間の点に関する関係概念としての対称。

指導

点対応(重なる点の対応)の確認で，点のプロットを，図から(図を描いている)シートに拡張する。

さらに，シートを“空間”(合同，相似の単元で既習）として見させ，点対応を空間の上のものとして考えさせる。

発問：“空間のこの点対応にも規則があるのでは？”

“同じ規則があった”

対応する二点に対し，“対称”の表現を与える。

解説/留意事項

シートを空間にする手続きは，つぎのようになる。即ち，点対応の確認の過程で“点で埋めつくされているもの”としてシートを認識させ，“点で埋めつくされているもの”の見方が“空間”であったことを想起させる。

1の4時

主題

(1) 空間の部分の関係概念としての対称。

(2) 自己対称な図の特徴づけ。

指導

(1) 線対称の関係にある二つの図A，A'が対称軸Lとともに描かれている紙を黒板に貼付する。

AとA'とLの間にあるきまりを課題として出す。

A上の点とLに関して線対称な点がA'上にあり，逆に，A'上の点とLに関して線対称な点がA上にあるという認識に導く。

Lと二つの図AとA'の関係の表現として，“Lについて対称”のことばを与える。

Lとは別の直線を描いて，これに関してはAとA'が線対称でないことを確認する。

対称軸がとれる図の対と，そうでない図の対の例を，それぞれ示す。

(2) 自己線対称な図に対する，“それの対称軸に関してそれ自身と対称”の見方を導入する。

解説/留意事項

“対称”は二項関係である。したがって，“対称な図”は，厳密には“自己対称な図”である（本論文で一貫してこの言い回しを用いてきている)。

1の5時

主題

(1) 与えられた図に対し対称の関係にある図の作成。

(2) 自己対称な図の作成。

(3) 対称軸を色々にとることによる，異なる対称変換の実現。

指導

(1) 二点に関する線対称の概念を想起させる。

対称軸の直線Lを定め，発問，応答の形で線対称な二点の組をいくつか描き進めながら，対称の意味を確認する。

つぎに，この絵の上に一つの線図Aを加え，A上の点と対称な点が描く図A'を課題化する。

A'を作図させる。

A'上の点と対称な点が描く図を課題化し，これがAに一致することを確認させる。

(2) 直線Lに関して線対称な二つの図が，一つの図としては，Lを折り目にして重なる図であることを認識させる。

このことと(1)で学習したことを用いて，自

己線対称な図をつくってみる。

解説/留意事項

素材は，簡単な図であること。また，作業のための時間を十分保障すること。

２の１時

主題

(1) 対称変換が等長変換であること。

(2) これの含意として，対称の関係にある二つの図が合同であること。

指導

一つの図と一つの直線を与え，直線を対称軸として図と対称の関係にある図を描くことを，課題として出す。

与えられた図と描かれた図が合同であることの認識に導く。

合同の確証を課題化する。

発問：“何が言えたらよいか？”

“距離を変えない点対応”が合同を説明する概念であったことの想起に導く。

対称の点対応に対し“距離を変えない点対応”を確かめようとする発想に導く。

まとめ：“対称の点対応で，距離は変わらない”，“対称な二つの図は合同”

4.3.2 点対称

３の１時

主題

(1) 自己点対称な図のきまりを，課題化する。

(2) 図の上に対称の点対応をつくる。

指導

*S*の字の形の自己点対称な図に対し，これのきまりを課題として出す。

きまりがあること，そしてそれが線対称のきまりに似ていることを，予め伝えるという形で，課題に入る。

課題のきまりを，“点対応のきまり”として予想させる。

“回して重なる”の応えが出てきたときには，これを一旦受け入れるが，本時のねらいではないとして退ける。

特徴的な点対応を図の上につくれるのではないかという問題意識を，誘導する。

“この点にはどの点”という形で，予想される点対応を問う。

点対応をつくった自分の考えを述べさせる。

“反対のところにある”，“反対方向に等距離”に類することばを，取り上げる。

発問：“何をもとにして反対なの？”，“もとがあるの？”

対応づけた二点の中点に意識が向くよう，誘導する。

“反対”の基準，そして対応する二点を確定する課題から，確実なよりどころとして，図の端点の中点に着眼することを導く。

この点を“対称の中心”として用いた点対応を図の上に実現させる。

点対応のきまりをつぎのことばにする：“一点から反対方向に等距離”。

解説/留意事項

(1) 線対称の指導法を点対称にそのまま繰り返すことは，以下の理由からここではしない。

先ず，自己点対称の図の類化を課題化しにくい。自己点対称の図の類が決して見やすいものではないからである。そして，度を越して都合本意で素材を選ぶのは，最初から一つの図で指導を始めるのと変わらない。

線対称で学習したこと——対称を点対応のきまりとして特徴づける——を生かさないのも，不自然である。

そしてやはり，“対称”における“互いに逆”の意味を一度直接出しておきたいということがある。“回して重なる”の方便に頼るとき，意識

の傾向として，これが引っ込んだままになる恐れがある。

しかも，“相似の中心”を誘導する手間は，“回して重なる”も“互いに逆”も，大して変わるものではない。

(2) “対称の中心”を見ることは，もともと〈賭け〉である。本時での子どもの思考活動として導くものは，推論ではない。

3の2時

主題

自己点対称の類を知る。

指導

自己点対称な図とそうでない図をそれぞれ3つずつ展示し，前時で素材の図に対して見出したきまりを規準と定めて，図の類化を課題として出す。

解説/留意事項

いまは，“仲間分け”——外延から内包を導く——の逆をしている。

3の3時

主題

図の上の対称の点対応を，空間の部分の上の点対応と読み直し，さらにこれを空間の対称変換に拡張する。

指導

点対応の確認で，点のプロットを図から図を描いているシートに拡張する。さらに，シートを空間として見させ，点対応を空間の上のものとして考えさせる。

発問：“空間のこの点対応にも規則があるのでは？”

“同じ規則があった”

解説/留意事項

本時の進行は，線対称の1の3と同じ。

シートを空間に見ることを線対称の1の3で経験しているので，本時では，これを簡単に済ますことができる。

3の4時

主題

(1) 空間の点および部分に関する関係概念としての対称。

(2) 自己点対称な図の特徴づけ。

解説/留意事項

本時の進行は，線対称の1の4と同じ。

3の5時

主題

(1) 与えられた図に対し点対称の関係にある図の作成。自己点対称な図の作成。

(2) 対称の中心を色々にとることによる，異なる対称変換の実現。

解説/留意事項

本時の進行は，線対称の1の5と同じ。

4の1時

主題

(1) 対称変換が等長変換であること。

(2) これの含意として，対称の関係にある二つの図が合同であること。

指導：

一つの図と一点を与え，点を対称の中心として図と点対称の関係にある図を描くことを，課題として出す。

与えられた図と描かれた図が合同であることの認識に導く。

合同の確証を課題化する。

発問：“何が言えたらよいか？”

“距離を変えない点対応”が合同を説明する概念であったことの想起に導く。

対称の点対応に対し“距離を変えない点対応”を確かめようとする発想に導く。

まとめ：“対称の点対応で，距離は変わらない”，“対称な二つの図は合同”

解説/留意事項

本時の進行は，線対称の２の１と同じ。

4.3 指導時間表

1	1	自己線対称な図の類化
	2	自己線対称な図のきまりの課題化 線対称の点対応
	3	空間の上の線対称の点対応 空間の点の関係概念としての線対称
	4	空間の部分の関係概念としての線対称 自己線対称な図の特徴づけ
	5	線対称の関係にある図の作成 自己線対称な図の作成 異なる線対称変換の実現
2	1	線対称変換が等長変換であること 相互線対称な二つの図が合同であること
3	1	自己点対称な図のきまりの課題化 点対称の点対応
	2	自己点対称の類を知る
	3	空間の上の点対称の点対応 空間の点の関係概念としての点対称
	4	空間の部分の関係概念としての点対称 自己点対称な図の特徴づけ
	5	点対称の関係にある図の作成 自己点対称な図の作成 異なる点対称変換の実現
4	1	点対称変換が等長変換であること 相互点対称の二つの図が合同であること