“理 論” の 定 式 化 (2)

宮 下 英 明

A Formula of “Theory” (II)

Hideaki MIYASHITA

目 次

1991年4月15日受理

4　理論の準超越論的定義

4.1　帰納的集合のシステムという形での，理論の定義

われわれは，理論を，有限集合のシステムとして定義してきた。そしてシステムの要素を有限集合にとどめるために，“生成”を方法としてきた。理論の定義がかなり込み入ったものになったのは，このためである。

実際，システムの要素となる集合を帰納的集合まで許し，“有限集合主義”から一歩自由になることにすれば，各種プロダクションをおもてに出さずに済ませることができ，理論の定義はかなりシンプルになる。以下，この定義を示す。

4.2　理論の定義

理論とは，つぎのようなシステム

$$\mathcal{T}=(\mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathrm{P})$$

のことである：

(1)　$\mathcal{G}$はつぎのようなシステム（A, F）：

(1-1)　Aは帰納的集合で，その要素は文字と呼ばれる。また，Aはアルファベットと呼ばれる。

文字の有限列（空な列を含む）を語と言い，語がn個の文字でなるとき，それの長さはnであると言う。

語の集合をA^*で表わす。

(1-2)　Fは，A^*の帰納的な部分集合で，その要素は式(formula)と呼ばれる。

(3)　$\mathcal{A}$は，Fの帰納的な部分集合であり，その要素は公理と呼ばれる。

(4)　Pは，式に関する2項以上の関係を表わす帰納的述語の有限集合であり，その要素は推論規則(rule of inference)と呼ばれる。

各推論規則P$(W_1, W_2, \cdots\cdots, W_n, V)$は，

$$W_1, W_2, \cdots\cdots, W_n \to V$$

のようにも書かれる。また，この推論規則に対しては，“$W_1, W_2, \cdots\cdots, W_n$からVが直接に結果する”という読み方をする。

4.3　証明

式の有限系列$W_1, W_2, \cdots\cdots, W_n$は，つぎの条件を満たすとき，$\mathcal{T}$における証明であると言う——また，各$W_i$は証明の段階と言われる：

$1 \leqq i \leqq n$である任意のiについて，つぎのいずれかが成り立つ：

(1)　W_iは$\mathcal{T}$の公理；

(2)　iより小さい添字をもつ式の有限系列$W_{i(1)}, W_{i(2)}, \cdots\cdots, W_{i(k)}$が存在して，

$$W_{i(1)}, W_{i(2)}, \cdots\cdots, W_{i(k)} \to W_i$$

が$\mathcal{T}$の推論規則になる.

式Wに対して，それを最終の段階とする$\mathcal{T}$における証明が存在するとき，Wは$\mathcal{T}$における定理であると言う。また，Wは$\mathcal{T}$において証明可能(provable)であると言われ，このときの証明を，$\mathcal{T}$におけるWの証明と言う。

4.4　例——加法の理論

4.4.1　理論の定式化

加法の論理体系$\mathcal{T}$=（A, F, $\mathcal{A}$, P）が，以下のようにして定義される(註)。

(1)　A＝{1, ＋, ＝}

(2)　Fは，つぎのようにして定義される式の全体である：

1°　1は項である；

2°　項Uに対し，U1は項である；

3°　項U，Vに対し，U＋Vは項である；

4°　項U，Vに対し，U＝Vは式である；

5°　1°から4°を有限回適用して導かれる式のみが，式である。

(3)　$\mathcal{A}$：

(a1)　$1=1$

(a2)　$U1=U+1$

(a3)　$U1+V=U+V1$

ここで，Uは項。

(4)　P：

(i1)　$U=V \to U1=V1$

(i2)　$U=V \to V=U$

(i3)　$U=V,\ V=W \to U=W$

ここで，U，V，Wは項。

(2), (3), (4)に現われている記号U，V，Wは，

メタ記号で，"変数"として使用されている。即ち，F，$\mathscr{A}$，Pは，シェマで表現されている。

特に，F，$\mathscr{A}$，Pは無限集合である。但しそれは，帰納的という性格をもつ。即ち，

"この集合の要素である"

ことが，

"有限個の記号に対する実効的処理という形で生成できる"

ことに表現可能である。実際，§3.5.1.1 は，後者の仕方で加法理論を記述したものである。そして，この方法をとることで，無限集合を登場させずに理論を記述することができたのである。

（註） §3.5.1 参照。

4.4.2 証明の例

11＋111＝11111 は，つぎのように証明される：

1＝1	(a1)
11＝11	(i1)
111＝111	(i1)
1111＝1111	(i1)
11111＝11111	(i1)
11111＝1111＋1	(a2)
1111＋1＝111＋11	(a3)
111＋11＝11＋111	(a3)
11111＝111＋11	(i3)
11111＝11＋111	(i3)
11＋111＝11111	(i2)

5 理論の間の関係

5.1 理論の同型

二つの理論

$\mathscr{T}_i=(\mathscr{G}_i,\ \mathscr{G}_i,\ \mathscr{U}_i,\ \hat{\mathscr{U}}_i,\ \mathscr{A}_i)$ （註）

(i＝1, 2)

が同型であることを，つぎのように定義する。

即ち，テクスト変形システム

$(\mathscr{G}^{\#}_i,\ \mathscr{G}^{\#}_i,\ \hat{\mathscr{U}}^{\#}_i)$ (i＝1, 2)

の間の同型で，

(1) 文生成変形システム

$(\mathscr{G}_i,\ \mathscr{G}_i,\ \mathscr{U}_i)$ (i＝1, 2)

の間の同型を導き，かつ

(2) 公理$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ の間の1対1対応を導くものがとれること。

（註） 理論$(\mathscr{G},\ \mathscr{H},\ \mathscr{U},\ \hat{\mathscr{U}},\ \mathscr{A})$において，$\mathscr{G}$と$\mathscr{H}$は同値な文生成システムなので，$\mathscr{G}$は最初から$\mathscr{H}$としてとられていると考えてよい。したがって，$\mathscr{G}=\mathscr{H}$として一般性を失わない。

5.2 理論の強弱

二つの理論$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$において，

(1) $\mathscr{T}_1$から導かれる文変形システムおよびテクスト変形システムが，$\mathscr{T}_2$から導かれる文変形システムおよびテクスト変形システムよりもそれぞれ弱く，かつ

(2) $\mathscr{T}_1$の公理が$\mathscr{T}_2$の定理になる

とき，$\mathscr{T}_1$は$\mathscr{T}_2$よりも弱い（$\mathscr{T}_2$は$\mathscr{T}_1$よりも強い）と言い，$\mathscr{T}_1 \leqq \mathscr{T}_2$で表わす。

このとき，"$\mathscr{T}_1 \leqq \mathscr{T}_2$かつ$\mathscr{T}_2 \leqq \mathscr{T}_1$"は，理論の間の同値関係になるが，これを$\mathscr{T}_1 \sim \mathscr{T}_2$と表わす。

5.3 理論の部分

二つの理論

$\mathscr{T}_i=(\mathscr{G}_i,\ \mathscr{G}_i,\ \mathscr{U}_i,\ \hat{\mathscr{U}}_i,\ \mathscr{A}_i)$

(i＝1, 2)

において，

(1) 文生成変形システム$(\mathscr{G}_i,\ \mathscr{G}_i,\ \mathscr{U}_i)$ (i＝1, 2) に関して，

$(\mathscr{G}_1,\ \mathscr{G}_1,\ \mathscr{U}_1) \subset (\mathscr{G}_2,\ \mathscr{G}_2,\ \mathscr{U}_2)$

(2) テクスト変形システム$(\mathscr{G}^{\#}_i,\ \mathscr{G}^{\#}_i,\ \hat{\mathscr{U}}^{\#}_i)$ (i＝1, 2) に関して，

$(\mathscr{G}^{\#}_1,\ \mathscr{G}^{\#}_1,\ \hat{\mathscr{U}}^{\#}_1) \subset (\mathscr{G}^{\#}_2,\ \mathscr{G}^{\#}_2,\ \hat{\mathscr{U}}^{\#}_2)$

(3) 公理$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$に関して，

$\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$

が成り立っているとき，$\mathscr{T}_1$は$\mathscr{T}_2$の部分であると言う。

5.4 "論理体系"

理論$\mathscr{T}$が理論$\mathscr{T}'$と同型な部分をもつとき，

"$\mathscr{T}$は$\mathscr{T}'$を論理としてこれに従う理論である"

と言うことにする。

この言い回しにおける“論理”が，“理論”の意味で“論理体系”の語を用いるときの“論理”に対応している。

理論を“論理体系”と見なすときの“論理”は，一意ではない。特に，理論 $\mathcal{T}$は，それ自身を論理としてこれに従う理論である。

6　論理

6.1　理論としての論理

本節では，以下の“論理”を理論

$$\mathcal{T}=(\mathcal{G},\ \mathcal{G},\ \mathcal{U},\ \hat{\mathcal{U}})$$

として定式化する(→は拡張の方向を表わす)：

命題論理 → 述語論理 → 等号をもつ述語論理

述語論理 → 関係/関数記号をもつ述語論理

この定式化における $\mathcal{D}$の意味は，“換言規則”である。

6.2　命題論理

6.2.1　文生成システム

命題論理 $\mathcal{T}$は，以下のように定義される文生成システム $\mathcal{G}=({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ SEN)$を土台とする。

(1)　${}^{N}V=\{SEN\}$

(2)　${}^{T}V=\{(,),\ \wedge,\ \neg,\ \vee,\ \supset,\ \leftrightarrow\}$ (註1)

(3)　プロダクションPは，

$SEN\to(SEN)\wedge(SEN)$

$SEN\to(SEN)\vee(SEN)$

$SEN\to(SEN)\to(SEN)$

$SEN\to(SEN)\leftrightarrow(SEN)$

$SEN\to\neg(SEN)$

でなる(註2)。

SENが終端記号に変換されないので，命題論理は文（終端記号のみからなる記号列）を生成しない。言い換えると，命題論理は文をもたない。

（註１）　これらは，命題論理の論理記号と呼ばれる。また，このうちの∨，⊃，↔は，本来，簡約記号として導入されるところのものである――この“簡約”の意味は，§6.2.2 で述べる文変形規則の(SR1)，(SR2)，(SR3)に示される。

‘⊃’は“含意”の記号である。記号‘→’を使用するのがむしろ一般的であるが，文生成のプロダクションの記号‘→’，文変形のプロダクションの記号‘→’と紛れないために，ここでは記号‘⊃’を用いることにする。

（註２）　これは，文を，つぎのように再帰的に定義することに対応する：

(1)　文φ，ψに対し，$\varphi\wedge\psi$は文；

(2)　文φに対し，$\neg\varphi$は文；

6.2.2　文変形システム

$\mathcal{G}$の上の文変形システム $\mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D})$は，以下のようになる：

(1)　$\mathcal{G}$のシェマシステム $\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{G}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$では，

(1-1)　$\overline{\mathcal{G}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{SEN})$ は，

${}^{N}\overline{V}$：

$\overline{SEN}$：文シェマ生成に関する

$\overline{SVR}$：文記号生成に関する(註1)

${}^{T}\overline{V}={}^{T}V\cup\{sen,\ {}_{1}\}$

$\overline{P}$：

$\overline{SEN}\to(\overline{SEN})\wedge(\overline{SEN})$

$\overline{SEN}\to(\overline{SEN})\vee(\overline{SEN})$

$\overline{SEN}\to(\overline{SEN})\supset(\overline{SEN})$

$\overline{SEN}\to(\overline{SEN})\leftrightarrow(\overline{SEN})$

$\overline{SEN}\to\neg(\overline{SEN})$

$\overline{SEN}\to(\overline{SVR})$

$\overline{SVR}\to\overline{SVR}_{1}$

$\overline{SVR}\to sen$

(1-1)　σ：

$\overline{SEN}\to SEN$

(1-3)　$\mathcal{R}=\phi$。

(2)　$\mathcal{D}$：

(2-1)　変形補助記号は無し。

(2-2)　文変形規則は，以下のもの(註2)：

(C1) $\neg(\neg(\mathrm{sen}))\rightleftarrows\mathrm{sen}$

(C2) $\mathrm{sen}\wedge\mathrm{sen}_1\rightarrow\mathrm{sen}_1\wedge\mathrm{sen}$

(C3) $\neg((\neg\mathrm{sen})\wedge(\neg\mathrm{sen}_1))\rightleftarrows\mathrm{sen}\vee\mathrm{sen}_1$

あるいは，同じこととして[註3]，

$\mathrm{sen}\wedge\mathrm{sen}_1\rightleftarrows\neg((\neg\mathrm{sen})\vee(\neg\mathrm{sen}_1))$

(C4) $\neg(\mathrm{sen}\wedge\neg\mathrm{sen}_1)\rightleftarrows\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1$

あるいは，同じこととして[註4]，

$\mathrm{sen}\wedge\mathrm{sen}_1\rightleftarrows\neg(\mathrm{sen}\supset\neg\mathrm{sen}_1)$

$(\neg\mathrm{sen})\vee\mathrm{sen}_1\rightleftarrows\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1$

$\mathrm{sen}\vee\mathrm{sen}_1\rightleftarrows\neg\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1$

(C5) $(\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1)\wedge(\mathrm{sen}_1\supset\mathrm{sen})$

$\rightleftarrows\mathrm{sen}\leftrightarrow\mathrm{sen}_1$

(註1) $\overline{\mathrm{SVR}}$ (Sentence-VaRiable) から，文記号

(sen)，(sen_1)，(sen_{11})，……

が生成されることになる。

非終端記号$\overline{\mathrm{SVR}}$に関するプロダクションは，'ξ_{23}'のように記号列を一つの変数として使用するわれわれの通常の実践の定式化になっている。

このように記号列を変数として使えるようにするときは，'ξ_{23}'の'ξ_2'に対して代入が行なわれるようなことがないように，対処しなければならない。

これは，^{T}Vに括弧：

(，)

を含ませ，生成されるシェマ変数が括弧で括られた記号列になるようにすることで，処置できる。プロダクションの

$\overline{\mathrm{SEN}}\rightarrow(\overline{\mathrm{SVR}})$

の括弧には，このような意味がある。（もちろん，シェマ変数として記号列を用いないことにすれば，このような措置は必要ない。）

以下の記述では，煩瑣を避ける意味から，この措置のための括弧の表示は適宜省略する。

(註2) (C3) から (C5) までは，$\vee$，$\supset$，$\leftrightarrow$を簡約記号として導入することに対応するもの。

(註3) (C_1) より，$\neg(\neg\mathrm{sen}\wedge\neg\mathrm{sen}_1)\rightleftarrows\mathrm{sen}\vee\mathrm{sen}_1$のとき，$\mathrm{sen}\wedge\mathrm{sen}_1\rightleftarrows\neg\neg(\neg\neg\mathrm{sen}\wedge\neg\neg\mathrm{sen}_1)\rightleftarrows\neg(\neg\mathrm{sen}\vee\neg\mathrm{sen}_1)$。逆に，$\mathrm{sen}\wedge\mathrm{sen}_1\rightleftarrows\neg(\neg\mathrm{sen}\vee\neg\mathrm{sen}_1)$のとき，$\neg(\neg\mathrm{sen}\wedge\neg\mathrm{sen}_1)\rightleftarrows\neg\neg(\neg\neg\mathrm{sen}\vee\neg\neg\mathrm{sen}_1)\rightleftarrows\mathrm{sen}\vee\mathrm{sen}_1$。

(註4) (C_1) による。

6.2.3 推論システム

$\hat{\mathcal{U}}=(\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$ は，つぎのようになる。

(1) $\hat{\mathcal{S}}$は，$\mathcal{S}^{\#}=(\overline{\mathcal{G}}^{\#},\ \sigma^{\#},\ \mathcal{R})$ の$\overline{\mathcal{G}}^{\#}$に対し，終端記号に

txt

を追加し，プロダクションに

$\overline{\mathrm{TXT}}\rightarrow\overline{\mathrm{TXT}_1}$

$\overline{\mathrm{TXT}}\rightarrow\mathrm{txt}$

を追加したもの。

(2) $\hat{\mathcal{D}}$では，

(2-1) テクスト変形補助記号は無し。

(2-2) テクスト変形規則は，"命題論理の公理"：

(S1) $\varepsilon\rightarrow\mathrm{sen}\supset(\mathrm{sen}_1\supset\mathrm{sen})$

(S2) $\varepsilon\rightarrow(\mathrm{sen}\supset(\mathrm{sen}_1\supset\mathrm{sen}_{11}))$

$\supset((\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1)\supset(\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_{11}))$

(S3) $\varepsilon\rightarrow(\neg\mathrm{sen}_1\supset\neg\mathrm{sen})\supset(\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1)$

と，"分離規則 (Modus Ponens)"：

(MP) "senと$\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1$から$\mathrm{sen}_1$が導かれる"[註]

と，そして$\mathcal{D}$が定める文変形規則から導かれるもの。

(註) "senと$\mathrm{sen}\rightarrow\mathrm{sen}_1$から$\mathrm{sen}_1$が導かれる"は，簡約化した言い方であり，これをきちんと述べるならば，以下のようになる：

(1) ${}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}_1/$

$\rightarrow\ {}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}_1{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

(2) ${}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1/$

$\rightarrow\ {}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

(3) ${}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}/$

$\rightarrow\ {}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

(4) ${}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1/$

$\rightarrow\ {}^\wedge\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

(5) $/\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}_1/$

$\rightarrow\ /\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}_1{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

(6) $/\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1/$

$\rightarrow\ /\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{txt}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

(7) $/\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}_1/$

$\rightarrow\ /\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{txt}_1{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

(8) $/\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1/$

$\rightarrow\ /\mathrm{sen}{}^\wedge\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1{}^\wedge\mathrm{sen}_1/$

ここで，/は，テクストの端を表わすメタ記号。

6.3　述語論理

6.3.1　“一般化規則”の排除

6.3.1.1　“一般化規則”の所在

一つのシェマsに対し，sが定理シェマ（§6.8)であることを示す証明は,超越論的である。実際，この証明は,《sをシェマとする全ての文は定理》という結論に現われる“全て”という語を扱わねばならない。これは超越論である。

そこで,“全て”の語を扱うこの証明において,われわれは超越論的な規則を用いていることになる。

例えば，sen⊃senが定理シェマであることを示すのに,メタ記号φを導入し,つぎのような論法を用いる：

“文φに対し，テクスト変形規則（“推論規則”）から，……のようにして$\varphi\supset\varphi$が導かれる。したがって$\varphi\supset\varphi$は定理。φは任意だからsen⊃senは定理シェマ。”

そして最後を締めくくっていることば：

“φは任意だからsen⊃senは定理シェマ。”

は，所謂“一般化規則”：

$$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$$

のメタ的適用ということになる。

このメタ証明は,(∀sen)(sen⊃sen)を定理シェマとして確立しようとするメタ証明とは，区別される。実際，後者の証明は，

“文変項φに対し，テクスト変形規則(“推論規則”)から，……のようにして$\varphi\supset\varphi$が導かれる。したがって$\varphi\supset\varphi$は定理。よって，$\varphi\supset\varphi$から一般化規則によって導かれる$(\forall\varphi)(\varphi\supset\varphi)$も定理。$\varphi$は任意だから(∀sen)(sen⊃sen）は定理シェマ。”

そして，この証明の中の“一般化規則”は推論規則であり，先頭の全称記号がシェマ全体を束縛している形のシェマを定理シェマとして証明する場合には，必須の推論規則となる。

しかし，先頭の全称記号がシェマ全体を束縛している形の定理シェマは，“実効性”の観点で言えば，先頭の全称記号を除いた定理シェマと変わらない。この全称記号は，過剰なのである。しかもつぎに述べるように，“一般化規則”の措定は，“演繹定理”と両立できないという難点が伴う。

そこでわれわれは，述語論理から“一般化規則”を排除することにする。

6.3.1.2　一般化規則と演繹定理との非両立性

われわれは,定理の導出——結果から見ると,定理の証明——を，テクスト生成と捉え，このときの規則を“推論規則”と見なした。このような推論規則は，テクスト

$$\varphi\,\hat{}\,\theta_1\,\hat{}\cdots\cdots\hat{}\,\theta_n\,\hat{}\,\psi$$

$$(\varphi,\ \theta_1,\ \cdots\cdots,\ \theta_n,\ \psi\text{は句})$$

が生成されるという事実から$\varphi\supset\psi$を結論するものでなければならない。実際これが“演繹定理”というメタ(超越論的)定理で述べられていることである。そしてこのとき，一般化規則

$$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$$

は，$\varphi\supset(\forall x)\varphi$を定理と定めるものでなければならない。

しかしこれは通用しない——この意味で,“一般化定理”は“演繹定理”と両立しない。

例えば,文φと変項xに対し,つぎの推論が可能になって　$(\exists x)\varphi\supset\varphi$　が定理になってしまう（特に，$(\exists x)\varphi\supset(\forall x)\varphi$　が定理となる)：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\exists x)\varphi}{\neg\neg(\exists x)\varphi}}{\neg\neg(\exists x)(\neg\neg\varphi)}}{\neg(\forall x)(\neg\varphi)} \qquad \dfrac{\neg\varphi\supset(\forall x)(\neg\varphi)^{(*)}}{\neg(\forall x)(\neg\varphi)\supset\neg\neg\varphi}}{\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}}$$

(＊)：一般化規則に演繹定理を適用して得られる定理

なお，われわれはsen⇄¬¬senを変形規則の筆

頭に位置付ける。

6.3.2 文生成システム

述語論理 $\mathcal{T}$は，以下のように定義される文生成システム $\mathcal{G}$=(^{N}V，^{T}V，P，SEN）を土台とする。

(1) ^{N}Vは，命題論理の^{N}Vに，

TVR[註1]：変項生成に関する

TRM　：項生成に関する

を追加したもの。

(2) ^{T}Vは，命題論理の^{T}Vに，論理記号

$\forall$

を追加したもの。

(3) Pは，命題論理のPに，

SEN→(∀(TVR))(SEN)

TRM→TVR

を追加したもの[註2]。

命題論理が文をもたないので，述語論理も<u>文をもたない</u>。

（註1） TVR は，“Term-VaRiable”。

（註2） これは，文を，つぎのように再帰的に定義することに対応する：

(1) 命題論理の文は，文；

(2) 変項xと命題論理の文φに対し，(∀x)φは文；

(3) 上の(1)，(2)の適用で生成されるもののみが，文。

6.3.3 自由変項，束縛変項

一つの文の中の二つの括弧：

a =‘(’と，それの右方向にあるb =‘)’

が互いに対応するということを，つぎのように定義する。

aとbを両端とする記号列の中に現われる全ての括弧（aとbを含む）に対して，aからbへ番号 0，1，2，……を順にふる。番号全体の集合をMとし，関数

$$p : M \longrightarrow \{1, -1\}$$

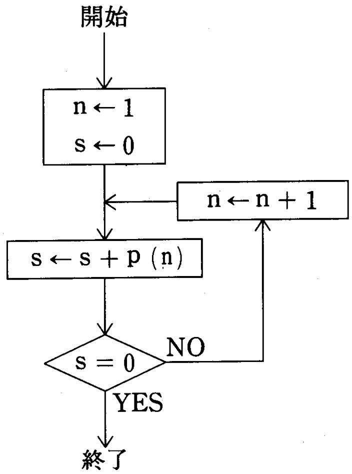
をつぎのように定義する：

$$p(n) = \begin{cases} 1 & (\text{番号nの括弧が‘(’のとき}) \\ -1 & (\text{番号nの括弧が‘)’のとき}) \end{cases}$$

そして，aとbが互いに対応する括弧であるということを，つぎのプログラムが

$$s = (\text{bの番号})$$

の状態で終了することと定義する：



変項xは，∀と連結しているか，あるいは条件：

(1) それの左方向に記号列‘(∀x)’がある；

(2) この記号列の右隣りにある括弧‘(’に対応する‘)’は，xの右方向にある

を満たすとき，束縛変項であると言う——そうでないときは，自由変項であると言う。

6.3.4 “式”，“文”

われわれは，文生成システム $\mathcal{G}$が生成する文を“式”と呼び，“文”の語は，“自由変項を含まない式”を指すものと約束する。——尤も，述語論理は式（特に，文）をもたないが。

6.3.5 文変形システム

$\mathcal{G}$の上の文変形システム $\mathcal{U}$=($\mathcal{S}$，$\mathcal{D}$)は，以下のようになる：

(I) $\mathcal{G}$のシェマシステム $\mathcal{S}$=($\overline{\mathcal{G}}$，σ，$\mathcal{R}$)では，

(1) $\overline{\mathcal{G}}$=($^N\overline{\text{V}}$，$^T\overline{\text{V}}$，$\overline{\text{P}}$，$\overline{\text{SEN}}$）は，

(1-1) $^N\overline{\text{V}}$は，命題論理の$^N\overline{\text{V}}$に

$\overline{\text{TVR}}$：変項シェマ記号の生成に関する

$\overline{\text{TRM}}$：項シェマ記号の生成に関する

を追加したもの。

(2-2) $^T\overline{\text{V}}$は，命題論理の$^T\overline{\text{V}}$に

tvr ：原初変項シェマ記号

trm ：原初項シェマ記号

　　[,]：括弧
　　↓ ：代入記号
　　nf
　を追加したもの。

(2-3) $\overline{\mathrm{P}}$は，命題論理の$\overline{\mathrm{P}}$に，

式，項の生成[註1]

$\overline{\mathrm{SEN}} \to (\overline{\mathrm{SEN}})\ [(\overline{\mathrm{TVR}}) \downarrow (\overline{\mathrm{TRM}})]$

$\overline{\mathrm{SEN}} \to \mathrm{nf}\ [(\overline{\mathrm{TVR}})]$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to (\overline{\mathrm{TRM}})\ [(\overline{\mathrm{TVR}}) \downarrow (\overline{\mathrm{TRM}})]$

変項シェマ記号の生成[註2]

$\overline{\mathrm{TRM}} \to (\overline{\mathrm{TVR}})$

$\overline{\mathrm{TVR}} \to \overline{\mathrm{TVR}}_1$

$\overline{\mathrm{TVR}} \to \mathrm{tvr}$

項シェマ記号の生成[註3]

$\overline{\mathrm{TRM}} \to \overline{\mathrm{TRM}}_1$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to \mathrm{trm}$

を追加したもの。

(2) シェマ関数σは，命題論理のσに

$\overline{\mathrm{TRM}} \to \mathrm{TRM}$

を追加したもの

(3) 代入規則 $\mathcal{R}$は，以下のもの：

(3-1) 代入枠が

$\overline{\mathrm{SEN}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{s}}$，$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{x}}$，$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{t}}$，

$\mathrm{SEN} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{s}$，$\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{x}$，$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{t}$

に対する

$\{(\bar{\mathrm{s}},\ \mathrm{s}),\ (\bar{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}),\ (\bar{\mathrm{t}},\ \mathrm{t}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$(\mathrm{s}[\bar{\mathrm{x}} \downarrow \bar{\mathrm{t}}])$には，sの中の自由なxにtを直接代入することでsから得られる記号列（式）を，直接代入する。

(3-2) 代入枠が

$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{s}}$，$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{x}}$，$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{t}}$，

$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{s}$，$\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{x}$，$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{t}$

に対する

$\{(\bar{\mathrm{s}},\ \mathrm{s}),\ (\bar{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}),\ (\bar{\mathrm{t}},\ \mathrm{t}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$(\bar{\mathrm{s}}\ [\bar{\mathrm{x}} \downarrow \bar{\mathrm{t}}])$には，sの中のxにtを直接代入することでsから得られる記号列（項）を，直接代入する。

(3-3) 代入枠が

$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{x}}$，$\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{x}$，

$\mathrm{SEN} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{nf}\ [\bar{\mathrm{x}}]$，$\mathrm{SEN} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{s}$

に対する

$\{(\bar{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}),\ (\mathrm{nf}\ [\bar{\mathrm{x}}],\ \mathrm{s}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$(\mathrm{nf}\ [\bar{\mathrm{x}}])$には，

(i) sがxを自由変項として含まないときは，s自身；

(ii) sがxを自由変項として含むときは，$(\forall \mathrm{x})\mathrm{s}$

を直接代入する[註4]。

(3-4) 代入枠が$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{x}}$，$\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{x}$に対する

$\{(\bar{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，右に↓のない$\bar{\mathrm{x}}$には，xを直接代入する。

(3-5) 代入枠が$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\mathrm{t}}$，$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{t}$に対する

$\{(\bar{\mathrm{t}},\ \mathrm{t}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，左に↓のない$\bar{\mathrm{t}}$には，tを直接代入する。

(II) $\mathcal{D}$は，命題論理の$\mathcal{D}$に同じ。

（註1） これの意味は，次節で明らかになる。

（註2） したがって，

(tvr)，(tvr_1)，(tvr_{11})，……

が，変項シェマ記号の全て。

（註3） したがって，

trm，trm_1，trm_{11}，……

が，項シェマ記号の全て。

（註4） ‘nf’は，“not free”の‘n’，‘f’をとったもの。代入枠 $\{(\bar{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}),\ (\mathrm{nf}\ [\bar{\mathrm{x}}],\ \mathrm{s}),\ \cdots\cdots\}$ の下でnf $[\bar{\mathrm{x}}]$ に代入されるのは，文sに対して《sが変項xを自由変項として含むときは，これを（$\forall$x）で束縛する》という処置を施して得られる文である。この文においてxは自由変項でない。

6.3.6 推論システム

$\hat{\mathcal{U}} = (\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$ は，つぎのようになる。

(1) $\hat{\mathcal{S}}$は，$\mathcal{S}^{*} = (\overline{\mathcal{G}}^{*},\ \sigma^{*},\ \mathcal{R}^{*})$ の$\overline{\mathcal{G}}^{*}$を，$\overline{\mathcal{G}}^{*}$と命題論理の$\overline{\mathcal{G}}^{*}$の合併に改めたもの。

(2) $\hat{\mathcal{D}}$は，命題論理の$\hat{\mathcal{D}}$に，文変形規則から導かれるテクスト変形規則と，

(Q0) $\varepsilon \to \mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}]$

(Q1) $\varepsilon \to (\forall (\mathrm{tvr}))(\mathrm{sen}) \supset (\mathrm{sen})\ [(\mathrm{tvr}) \downarrow (\mathrm{trm})]$

(Q2) $\varepsilon \to (\forall (\mathrm{tvr}))((\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]) \supset (\mathrm{sen})) \supset ((\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]) \supset (\forall (\mathrm{tvr}))(\mathrm{sen}))$

(Q3) $\varepsilon \to \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

(Q4)　$\varepsilon \rightarrow (\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1)$

$\supset ((\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen} \supset (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen}_1)$

を追加したもの(註)。

(註)　(Q1)，(Q2) は，所謂“限量子公理 (quantifier axiom)”。(Q0)，(Q3)，(Q4) は，“一般化規則”を排除したために必要となった。

6.3.7　簡約記号∃の導入

簡約記号∃を，つぎの手続きで導入する：

(1)　$\mathcal{G}$と$\mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D})$を，以下のように変更する：

(1-1)　^{T}Vに記号∃を追加する。

(1-2)　Pにつぎの規則を追加する：

$\mathrm{SEN} \rightarrow (\exists \mathrm{TVR})(\mathrm{SEN})$

(1-3)　上の変更に，$\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{G}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$ の変更を対応させる。

(1-4)　$\mathcal{D}$につぎの規則を追加する：

(C6)　$\neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg \mathrm{sen})) \rightleftarrows (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

あるいは同じこととして，

$\neg((\exists \mathrm{tvr})(\neg \mathrm{sen})) \rightleftarrows (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

(2)　(1)の変更に，$\hat{\mathcal{U}}=(\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$の変更を対応させる。

記号∀に関するテクスト変形規則(Q1)，(Q2)は，記号∃に対してはつぎのようになる(註)：

(Q1)　$\varepsilon \rightarrow \mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}] \supset (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

(Q2)　$\varepsilon \rightarrow \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

$\supset (\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge \mathrm{sen})$

(Q3)　$\varepsilon \rightarrow (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

(Q4)　$\varepsilon \rightarrow (\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1)$

$\supset ((\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}) \supset (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}_1))$

(註)　(Q1)，(Q2)，(Q3)，(Q4) (§6.3.6) の→の右辺を，以下のように順次変形する：

(Q1)：

$(\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}]$

$\neg(\mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}]) \supset \neg((\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen})$

$(\neg \mathrm{sen})\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}] \supset \neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg\neg \mathrm{sen}))$

$\mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}] \supset \neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg \mathrm{sen}))$

$\mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}] \supset (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

(Q2)：

$(\forall \mathrm{tvr})(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \mathrm{sen})$

$\supset (\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen})$

$\neg(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen})$

$\supset \neg((\forall \mathrm{tvr})(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \mathrm{sen})$

$\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge (((\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen})$

$\supset \neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg\neg(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \mathrm{sen}))$

$\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge \neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg\neg \mathrm{sen}))$

$\supset \neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge \neg \mathrm{sen})))$

$\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge \neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg \mathrm{sen}))$

$\supset \neg((\forall \mathrm{tvr})(\neg(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge \mathrm{sen})))$

$\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

$\supset (\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge \mathrm{sen})$

(Q3)：

$\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$\neg(\forall \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \neg \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$(\exists \mathrm{tvr})\neg \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \neg \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$(\exists \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

(Q4)：

$(\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1) \supset ((\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen} \supset (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen}_1)$

$(\neg \mathrm{sen}_1 \supset \neg \mathrm{sen})$

$\supset (\neg(\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen}_1 \supset \neg(\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen})$

$(\neg \mathrm{sen}_1 \supset \neg \mathrm{sen})$

$\supset ((\exists \mathrm{tvr})\neg \mathrm{sen}_1 \supset (\exists \mathrm{tvr})\neg \mathrm{sen})$

$(\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1)$

$\supset ((\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen} \supset (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}_1)$

6.4　等号をもつ述語論理

述語論理を，等号の付加によって拡張する。この拡張された述語論理を，“等号をもつ述語論理”と呼ぶことにする。

6.4.1　文生成システム

述語論理の土台となる文生成システム$\mathcal{G}=(^{N}\mathrm{V},\ ^{T}\mathrm{V},\ \mathrm{P},\ \mathrm{SEN})$ を，以下のように変更する：

(1)　^{T}Vに，等号

$=$

を追加する。

(2)　Pに，

$\mathrm{SEN} \rightarrow (\mathrm{TRM}) = (\mathrm{TRM})$

を追加する。

6.4.2　文/テクスト変形システム

$\mathcal{G}$の上の文変形システム$\mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D})$を，以下のように変更する：

(I)　$\mathcal{G}$のシェマシステム$\mathcal{S}=(\mathcal{G},\ \sigma,\ \mathcal{R})$に対し，

(1)　$\overline{\mathcal{G}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{SEN})$では，

(1-1)　${}^{T}V$に

=

を追加する。

(1-2)　$\overline{P}$に，

$\overline{SEN}\rightarrow(\overline{TRM})=(\overline{TRM})$

を追加する

(II)　$\mathcal{D}$は，述語論理の$\mathcal{D}$に，つぎの等号の規則を追加する：

(E1)　$(trm=trm_1)\rightarrow(trm_1=trm)$

(III)　$\hat{\mathcal{U}}=(\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$では，

(3-1)　$\mathcal{S}$の変更に対応して$\hat{\mathcal{S}}$を変更する。

(3-2)　述語論理の$\hat{\mathcal{D}}$に，$\mathcal{D}$から導かれる変形規則の他に，等号の規則：

(E2)　$\varepsilon\rightarrow trm=trm$

(E3)　“$trm=trm_1$と$trm_1=trm_2$から

$trm=trm_2$　が導かれる”

を追加する。

6.5 関係/関数記号をもつ述語論理

この節では，述語論理に関係/関数記号を付加して拡張する方法を示す。

6.5.1　文生成システム

述語論理の土台となる文生成システム$\mathcal{G}=({}^{N}V,{}^{T}V,P,SEN)$を，以下のように変更する：

(1)　${}^{N}V$に

REL(註1)：関係生成に関する

FUN(註2)：関数生成に関する

を追加する。

(2)　${}^{T}V$に，記号

〈,　　〉

を追加する。

(3)　Pに，

SEN→<TVR>(SEN)［TRM］

SEN→REL

REL→<TVR>(SEN)［］

TRM→<TVR>(TRM)［TRM］

TRM→FUN

FUN→<TVR>(TRM)［］

を追加する。

このとき，

(1)　変項x_1，……，x_n

(2)　$t_1=\cdots\cdots=t_n=\varepsilon$

(3)　式φ，項τ

に対し，

$<x_n>(\cdots\cdots(<x_1>(\varphi)\ [t_1])\cdots\cdots)\ [t_n]$

$<x_n>(\cdots\cdots(<x_1>(\tau)\ [t_1])\cdots\cdots)\ [t_n]$

は，それぞれ式と項であるが，この形(註3)の式，項を，それぞれ“関係”，“関数”と呼ぶ。

xi　はこの関係および関数の変数であると言う。

変数の個数がkである関係，関数を，それぞれ，k項関係，k変数関数と呼ぶ。

(註1)　REL　は，“RELation”。

(註2)　FUN　は，“FUNction”。

(註3)　ここでは，通常の表記の‘f(x)’を<x>(f)[]に改め，f(x)　のxにtを代入した‘f(t)’を<x>(f)［t］に改めている。式の生成規則を簡単にするために，このような形を敢えて選ぶことにする。

6.5.2　文/テクスト変形システム

$\mathcal{G}$の上の文変形システム$\mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D})$を，以下のように変更する：

(I)　$\mathcal{G}$のシェマシステム$\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{G}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$に対し，

(1)　$\overline{\mathcal{G}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{SEN})$では，

(1-1)　${}^{N}\overline{V}$に

$\overline{REL}$：関係シェマ記号生成に関する

$\overline{FUN}$：関数シェマ記号生成に関する

を追加する。

(1-2)　${}^{T}\overline{V}$に，〈,〉と

rel：原初関係シェマ記号

fun：原初関数シェマ記号

を追加する。

(1-3)　$\overline{P}$に，

$\overline{SEN}$→<$\overline{TVR}$>($\overline{SEN}$)［$\overline{TRM}$］

$\overline{SEN}$→$\overline{REL}$

$\overline{REL}$→<$\overline{TVR}$>($\overline{SEN}$)［］

$\overline{\mathrm{TRM}} \to < \overline{\mathrm{TVR}} > (\overline{\mathrm{TRM}})\ [\overline{\mathrm{TRM}}]$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to \overline{\mathrm{FUN}}$

$\overline{\mathrm{FUN}} \to < \overline{\mathrm{TVR}} > (\overline{\mathrm{TRM}})\ [\,]$

を追加する

(2) シェマ関数σに

$\overline{\mathrm{REL}} \to \mathrm{REL}$

$\overline{\mathrm{FUN}} \to \mathrm{FUN}$

を追加する

(3) 代入規則 $\mathcal{R}$に，つぎのものを追加する：

(3-1) 代入枠が$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{x}$，$\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} x$に対する

$\{(\bar{x},\ x),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$<\bar{x}>$には$<x>$を直接代入する。

(3-2) 代入枠が$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{t}$，$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} t$に対する

$\{(\bar{t},\ t),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$[\bar{t}]$ には $[t]$ を直接代入する。

(II) $\mathcal{D}$に，“関係および関数における変項への定項の代入”を導入する規則：

(R1) $<\mathrm{tvr}>(\mathrm{sen})\ [\mathrm{trm}] \to (\mathrm{sen})\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}]$

(R2) $<\mathrm{tvr}>(\mathrm{trm})\ [\mathrm{trm}] \to (\mathrm{trm})\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}]$

を追加する。

(III) $\mathcal{U}$の変更に対応して，$\hat{\mathcal{U}}=(\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$を変更する。

6.6 等号をもつ述語論理の構成一覧

ここで，等号をもつ述語論理

$$\mathcal{T}=(\mathcal{G},\ \mathcal{G},\ \mathcal{U},\ \hat{\mathcal{U}})$$

の構成一覧を示しておく。

(I) 文生成システム$\mathcal{G}=({}^{N}V,\ {}^{T}V,\ P,\ S)$：

(1-1) ${}^{N}V$：

SEN：文生成に関する

TVR：変項生成に関する

TRM：項生成に関する

(1-2) ${}^{T}V=\{(,\quad),\ \wedge,\ \neg,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ =\}$

(1-3) P：

$\mathrm{SEN} \to (\mathrm{SEN}) \wedge (\mathrm{SEN})$

$\mathrm{SEN} \to \neg(\mathrm{SEN})$

$\mathrm{SEN} \to (\mathrm{SEN}) \vee (\mathrm{SEN})$

$\mathrm{SEN} \to (\mathrm{SEN}) \to (\mathrm{SEN})$

$\mathrm{SEN} \to (\mathrm{SEN}) \leftrightarrow (\mathrm{SEN})$

$\mathrm{SEN} \to (\forall(\mathrm{TVR}))(\mathrm{SEN})$

$\mathrm{SEN} \to (\exists(\mathrm{TVR}))(\mathrm{SEN})$

$\mathrm{SEN} \to (\mathrm{TRM}) = (\mathrm{TRM})$

$\mathrm{TRM} \to \mathrm{TVR}$

(II) $\mathcal{U}=((\overline{\mathcal{G}},\ \sigma,\ \mathcal{R}),\ \mathcal{D})$：

(2-1) $\overline{\mathcal{G}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{\mathrm{SEN}})$：

${}^{N}\overline{V}=\{\overline{\mathrm{SEN}},\ \overline{\mathrm{SVR}},\ \overline{\mathrm{TVR}},\ \overline{\mathrm{TRM}},\ \overline{\mathrm{REL}},\ \overline{\mathrm{FUN}}\}$

${}^{T}\overline{V}={}^{T}V \cup \{\mathrm{sen},\ {}_{1},\ \mathrm{tvr},\ \mathrm{trm},\ [,],\ \downarrow,\ \mathrm{nf},\ =\}$

$\overline{P}$：

$\overline{\mathrm{SEN}} \to (\overline{\mathrm{SEN}}) \wedge (\overline{\mathrm{SEN}})$

$\overline{\mathrm{SEN}} \to \neg(\overline{\mathrm{SEN}})$

$\overline{\mathrm{SEN}} \to (\overline{\mathrm{SVR}})$

$\overline{\mathrm{SEN}} \to (\overline{\mathrm{SEN}})\ [(\overline{\mathrm{TVR}}) \downarrow (\overline{\mathrm{TRM}})]$

$\overline{\mathrm{SEN}} \to \mathrm{nf}\ [(\overline{\mathrm{TVR}})]$

$\overline{\mathrm{SEN}} \to (\overline{\mathrm{TRM}}) = (\overline{\mathrm{TRM}})$

$\overline{\mathrm{SVR}} \to \overline{\mathrm{SVR}}_1$

$\overline{\mathrm{SVR}} \to \mathrm{sen}$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to (\overline{\mathrm{TRM}})\ [(\overline{\mathrm{TVR}}) \downarrow (\overline{\mathrm{TRM}})]$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to (\overline{\mathrm{TVR}})$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to \overline{\mathrm{TRM}}_1$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to \mathrm{trm}$

$\overline{\mathrm{TVR}} \to \overline{\mathrm{TVR}}_1$

$\overline{\mathrm{TVR}} \to \mathrm{tvr}$

(2-2) σ：

$\overline{\mathrm{SEN}} \to \mathrm{SEN}$

$\overline{\mathrm{TRM}} \to \mathrm{TRM}$

(2-3) $\mathcal{R}$(“代入規則”)：

(2-3-1) 代入枠が

$\overline{\mathrm{SEN}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{s}$，$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{x}$，$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{t}$，

$\mathrm{SEN} \overset{*}{\Rightarrow} s$，$\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} x$，$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} t$

に対する

$\{(\bar{s},\ s),\ (\bar{x},\ x),\ (\bar{t},\ t),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$(\bar{s}\,[\bar{x} \downarrow \bar{t}])$には，sの中の自由なxにtを直接代入することでsから得られる記号列（式）を，直接代入する。

(2-3-2) 代入枠が

$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{s}$，$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{x}$，$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \bar{t}$，

$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} s$，$\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} x$，$\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} t$

に対する

$\{(\bar{s},\ s),\ (\bar{x},\ x),\ (\bar{t},\ t),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$(\bar{s}\,[\bar{x} \downarrow \bar{t}])$ には，sの中のx

にｔを直接代入することでｓから得られる記号列（項）を，直接代入する。

(2-3-3) 代入枠が

$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \overline{\mathrm{x}}$, $\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{x}$,

$\mathrm{SEN} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{nf}\ [\overline{\mathrm{x}}]$, $\mathrm{SEN} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{s}$

に対する

$\{(\overline{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}),\ (\mathrm{nf}\ [\overline{\mathrm{x}}],\ \mathrm{s}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，$(\mathrm{nf}\ [\overline{\mathrm{x}}])$ には，

(i) sがxを自由変項として含まないときは，s自身；

(ii) sがxを自由変項として含むときは，

$(\forall \mathrm{x})\mathrm{s}$

を直接代入する。

(2-3-4) 代入枠が$\overline{\mathrm{TVR}} \overset{*}{\Rightarrow} \overline{\mathrm{x}}$, $\mathrm{TVR} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{x}$に対する

$\{(\overline{\mathrm{x}},\ \mathrm{x}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，右に↓のない$\overline{\mathrm{x}}$には，xを直接代入する。

(2-3-5) 代入枠が$\overline{\mathrm{TRM}} \overset{*}{\Rightarrow} \overline{\mathrm{t}}$, $\mathrm{TRM} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{t}$に対する

$\{(\overline{\mathrm{t}},\ \mathrm{t}),\ \cdots\cdots\}$

であるとき，左に↓のない$\overline{\mathrm{t}}$には，ｔを直接代入する。

(2-4) $\mathscr{D}$（“換言規則”）：

文変形補助記号は無し。

文変形規則は，

(C1) $\neg(\neg(\mathrm{sen})) \rightleftarrows \mathrm{sen}$

(C2) $\mathrm{sen} \wedge \mathrm{sen}_1 \to \mathrm{sen}_1 \wedge \mathrm{sen}$

(C3) $\neg((\neg\mathrm{sen}) \wedge (\neg\mathrm{sen}_1)) \rightleftarrows \mathrm{sen} \vee \mathrm{sen}_1$

あるいは，同じこととして，

$\mathrm{sen} \wedge \mathrm{sen}_1 \rightleftarrows \neg((\neg\mathrm{sen}) \vee (\neg\mathrm{sen}_1))$

(C4) $\neg(\mathrm{sen} \wedge (\neg\mathrm{sen}_1)) \rightleftarrows \mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1$

あるいは，同じこととして，

$\mathrm{sen} \wedge \mathrm{sen}_1 \rightleftarrows \neg(\mathrm{sen} \supset \neg\mathrm{sen}_1)$

$(\neg\mathrm{sen}) \vee \mathrm{sen}_1 \rightleftarrows \mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1$

$\mathrm{sen} \vee \mathrm{sen}_1 \rightleftarrows \neg\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1$

(C5) $(\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1) \wedge (\mathrm{sen}_1 \supset \mathrm{sen})$

$\rightleftarrows \mathrm{sen} \leftrightarrow \mathrm{sen}_1$

(C6) $\neg((\forall\mathrm{tvr})(\neg\mathrm{sen})) \rightleftarrows (\exists\mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

$\neg((\exists\mathrm{tvr})(\neg\mathrm{sen})) \rightleftarrows (\forall\mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

(E_1) $(\mathrm{trm} = \mathrm{trm}_1) \to (\mathrm{trm}_1 = \mathrm{trm})$

(III) $\hat{\mathscr{U}} = ((\hat{\mathscr{G}},\ \sigma,\ \mathscr{R}),\ \hat{\mathscr{D}})$：

(3-1) $\hat{\mathscr{G}}$：

$\hat{\mathscr{G}}^*$ の終端記号に

txt

を追加し，プロダクションに

$\overline{\mathrm{TXT}} \to \overline{\mathrm{TXT}_1}$

$\overline{\mathrm{TXT}} \to \mathrm{txt}$

を追加。

(3-2) $\hat{\mathscr{D}}$：

テクスト変形補助記号は無し。

テクスト変形規則は，文変形規則から導かれるテクスト変形規則の他に，

(MP)　“senとsen⊃sen_1からsen_1が導かれる”

(S1)　$\varepsilon \to \mathrm{sen} \supset (\mathrm{sen}_1 \supset \mathrm{sen})$

(S2)　$\varepsilon \to (\mathrm{sen} \supset (\mathrm{sen}_1 \supset \mathrm{sen}_{11}))$
$\supset ((\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1) \supset (\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_{11}))$

(S3)　$\varepsilon \to (\neg\mathrm{sen}_1 \supset \neg\mathrm{sen}) \supset (\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1)$

(Q0)　$\varepsilon \to \mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}]$

(Q1)　$\varepsilon \to (\forall(\mathrm{tvr}))(\mathrm{sen})$
$\supset (\mathrm{sen})\ [(\mathrm{tvr}) \downarrow (\mathrm{trm})]$

$\varepsilon \to \mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr} \downarrow \mathrm{trm}] \supset (\exists\mathrm{tvr})\mathrm{sen}$

(Q2)　$\varepsilon \to (\forall(\mathrm{tvr}))((\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]) \supset (\mathrm{sen}))$
$\supset ((\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]) \supset (\forall(\mathrm{tvr}))(\mathrm{sen}))$

$\varepsilon \to \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge (\exists\mathrm{tvr})\mathrm{sen}$
$\supset (\exists\mathrm{tvr})(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \wedge \mathrm{sen})$

(Q3)　$\varepsilon \to \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset (\forall\mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$\varepsilon \to (\exists\mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}] \supset \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

(Q4)　$\varepsilon \to (\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1)$
$\supset ((\forall\mathrm{tvr})\mathrm{sen} \supset (\forall\mathrm{tvr})\mathrm{sen}_1)$

$\varepsilon \to (\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1)$
$\supset ((\exists\mathrm{tvr})\mathrm{sen}) \supset (\exists\mathrm{tvr})\mathrm{sen}_1))$

(E2)　$\varepsilon \to \mathrm{trm} = \mathrm{trm}$

(E3)　“$\mathrm{trm} = \mathrm{trm}_1$と$\mathrm{trm}_1 = \mathrm{trm}_2$から$\mathrm{trm} = \mathrm{trm}_2$が導かれる”

6.7　命題/述語論理の上の理論

命題［述語］論理を論理としてこれに従う理論（§5.4）のことを，“命題［述語］論理の上の理論”と言い表わす。

6.8　メタ定理，定理シェマ

6.8.1　メタ定理

命題論理の上の理論$\mathscr{T}$に関する事実を述べるものとしての“定理”は，“……は$\mathscr{T}$の定理”

と言うときの“定理”に対して，メタ定理である。

例えば，“推論公式”，“演繹定理”は，メタ定理であり，ある文シェマを定理シェマ——代入して得られる文が定理となるところのシェマ——として特定する言明も，メタ定理である。

6.8.2　定理の証明と定理シェマの証明

定理シェマの証明は，他者がつぎのように認めるとき実現されたことになる：

《このシェマをもつ定理が証明されるときの一般形式が，示されている》

“一般形式”を示すものは，やはり記号の列であり，それは新たなシェマである。

結局，定理シェマの証明とは，定理証明のシェマであり，定理シェマを証明するとは，定理証明のシェマをつくることである。そしてこのシェマをつくる言語は，理論の生成言語に対するメタ言語になる。

命題/述語論理の上の理論で文を生成するようなものは，まだ導入していない(註)。したがって，定理の証明をここで例示することはできない。(理論としての命題論理，述語論理には，文は存在しない！）しかし，命題/述語論理の上の理論一般の定理シェマ（簡単に“命題/述語論理の定理シェマ”と言い表わす）とそれの証明は，この段階でも例示することができる。以下これを示す。

(註) われわれは§7 で，自然数論をこのような理論として導入する。

6.8.3　命題論理の定理シェマの証明例

命題論理（の上の理論）のメタ定理として，つぎのものは周知である：

(T1)（“演繹定理”）
文φから文ψ(註1)が演繹されるとき，$\varphi\supset\psi$は定理。

(T2) $\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1$と$\mathrm{sen}_1\supset\mathrm{sen}_2$から，$\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_2$が導かれる。

(T3) senとsen_1から$\mathrm{sen}\wedge\mathrm{sen}_1$が導かれる。

また，つぎの定理シェマも周知のものである：

(T4) $\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}$

(T5) $\mathrm{sen}\supset\neg\neg\mathrm{sen}$，$\neg\neg\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}$

(T6) $\neg\mathrm{sen}\supset(\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1)$

(T7) $(\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_1)\supset(\neg\mathrm{sen}_1\supset\neg\mathrm{sen})$

(T8) $(\mathrm{sen}\supset\neg\mathrm{sen})\supset\neg\mathrm{sen}$

(T9) $(\mathrm{sen}\supset\mathrm{sen}_{11})\wedge(\mathrm{sen}_1\supset\mathrm{sen}_{11})$
$\supset((\mathrm{sen}\vee\mathrm{sen}_1)\supset\mathrm{sen}_{11})$

ここでは，(T4) が既に証明されているときの(T_1)(“演繹定理”）の証明と，(T_1) から (T8) が既に証明されているときの (T9) の証明を示す(註2)。

“演繹定理”の証明については，それが〈$\varphi\supset\psi$の証明作成の実効的手続き〉を示すものであるという点を，特に強調しておく。また，(T9) の証明は，変形規則適用の仕方のデモンストレーションを目的とする。

(I)　“演繹定理”の証明

φからのψの演繹が

$$\varphi\,\hat{}\,\theta_1\,\hat{}\cdots\cdots\hat{}\,\theta_{n-1}\,\hat{}\,\psi$$

(θ_iは文)

であるとする。

θ_iは，

(1)　換言規則によってφから導かれる

(2)　公理

のいずれかである。(1)の場合，同じ換言規則によって$\varphi\supset\varphi$から$\varphi\supset\theta_1$が導かれる。$\varphi\supset\varphi$が定理だから$\varphi\supset\theta_1$も定理。(2)の場合，θ_1と公理$\theta_1\supset(\varphi\supset\theta_1)$ (S_1)に対する分離規則の適用で，$\varphi\supset\theta_1$が定理として得られる。

いま，$\varphi\supset\theta_k$ ($k=1$, ……, i) が定理であるとする。

θ_{i+1}の導出がθ_iに換言規則を適用することによる導出であるとき，同じ換言規則によって$\varphi\supset\theta_i$から$\varphi\supset\theta_{i+1}$が導出される。仮定により$\varphi\supset\theta_i$は定理だから，$\varphi\supset\theta_{i+1}$も定理。

θ_{i+1}の導出がθ_iに対する換言規則の適用によるものでないとき，つぎのいずれかが成り立っている：

(1)　θ_{i+1}は公理；

(2)　或る$k<i+1$に対し，θ_{i+1}はθ_kと同じ；

(3)　或る$k<i+1$に対しθ_kが$\theta_l\supset\theta_{i+1}$と同じで，$\theta_l$と$\theta_l\supset\theta_{i+1}$に対する分離規則の適用

で，θ_{i+1}が導出される；

(4)　θ_iが或るk<iに対する文$\theta_k\supset\theta_{i+1}$であって，$\theta_k$と$\theta_k\supset\theta_{i+1}$に対する分離規則の適用で，$\theta_{i+1}$が導出される；

そしていずれの場合にも，$\varphi\supset\theta_{i+1}$は定理になる。

実際，(1)の場合，θ_{i+1}と公理$\theta_{i+1}\supset(\varphi\supset\theta_{i+1})$ (S_1)に対する分離規則の適用で，定理$\varphi\supset\theta_{i+1}$を得る。

(2)の場合は，$\varphi\supset\theta_k$が仮定から定理であることによる。

(3)の場合，仮定から$\varphi\supset(\theta_i\supset\theta_{i+1})$は定理。公理$(\varphi\supset(\theta_i\supset\theta_{i+1}))\supset((\varphi\supset\theta_i)\supset(\varphi\supset\theta_{i+1}))$より，$(\varphi\supset\theta_i)\supset(\varphi\supset\theta_{i+1})$は定理。さらに$\varphi\supset\theta_i$が仮定より定理であるから，$\varphi\supset\theta_{i+1}$も定理。

(4)の場合，仮定より$\varphi\supset(\theta_k\supset\theta_{i+1})$は定理。よって(3)と同じ考え方で$\varphi\supset\theta_{i+1}$が定理であることを得る。

(II)　(T9) の証明

$\varphi\vee\psi$(仮定)	⟵	$sen\vee sen_1$
		↓ (C4)
$\neg\varphi\supset\psi$	⟵	$\neg sen\supset sen_1$
		↓
$\neg\varphi\supset\psi$	⟵	$sen\supset sen_1$
&		&
$\psi\supset\theta$(仮定)		$sen_1\supset sen_{11}$
		↓ (T2)
$\neg\varphi\supset\theta$	⟵	$sen\supset sen_{11}$
‖		
$\neg\varphi\supset\theta$	⟵	sen_{11}
&		&
$\varphi\supset\theta$(仮定)		$sen\supset sen_1$
		↓ (T7), (MP)
$\neg\varphi\supset\theta$	⟵	sen_{11}
&		&
$\neg\theta\supset\neg\varphi$		$\neg sen_1\supset\neg sen$
‖		
$\neg\varphi\supset\theta$	⟵	$sen_1\supset sen_{11}$
&		&
$\neg\theta\supset\neg\varphi$		$sen\supset sen_1$
		↓ (T2)
$\neg\theta\supset\theta$	⟵	$sen\supset sen_{11}$
‖		
$\neg\theta\supset\theta$	⟵	$sen_1\supset sen$
		↓ (C_1)
$\neg\theta\supset\neg\neg\theta$	⟵	$sen_1\supset\neg\neg sen$
		↓ (T8)
$\neg\theta\supset\neg\neg\theta$	⟵	sen_1
&		&
$(\neg\theta\supset\neg\neg\theta)\supset\neg\neg\theta$		$(sen\supset\neg sen)\supset\neg sen$
‖		
$\neg\theta\supset\neg\neg\theta$	⟵	sen
&		&
$(\neg\theta\supset\neg\neg\theta)\supset\neg\neg\theta$		$sen\supset sen_1$
		↓ (MP)
$\neg\neg\theta$	⟵	sen_1
‖		
$\neg\neg\theta$	⟵	$\neg\neg sen$
		↓ (C_1)
θ	⟵	sen

(T_1) の“演繹定理”により，結局，$\varphi\supset\theta$と$\psi\supset\theta$から $(\varphi\wedge\psi)\supset\theta$が導かれる。

（註１）　φ，ψはメタ記号。“演繹定理”の証明の中のφ，ψ，θ，θ_1，θ_{n-1}，θ_i，および (T9) の証明の中のφ，ψ，θも同様。

（註２）　(T_1) から (T8) は，依存関係に従って，例えば (T4)，(T5)，(T1)，(T5)，(T6)，(T7)，(T8)，(T3) の順番で証明される。

6.8.4　述語論理の定理シェマの証明例

つぎは，定理シェマである：

(T10) $(\forall tvr)nf\ [tvr]\leftrightarrow nf\ [tvr]$

$(\exists tvr)nf\ [tvr]\leftrightarrow nf\ [tvr]$

証明は，xを変項，φをxが自由変項でない文として(‘x’，‘φ’はメタ記号)，つぎのようになされる：

		(tvr，x)
		(sen，φ)
$(\forall x)\varphi$	⟵	$(\forall tvr)sen$

$(\mathrm{trm},\ \mathrm{x})\ \big\downarrow$ (Q1)

$\varphi \longleftarrow \mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr}\downarrow\mathrm{trm}]$

演繹定理より，$(\forall \mathrm{x})\varphi \supset \varphi$は定理。一方，

$\varphi \longleftarrow \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$\big\downarrow$ (Q3)

$(\forall \mathrm{x})\varphi \longleftarrow (\forall \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

よって，$\varphi \supset (\forall \mathrm{x})\varphi$は定理。そして，

$(\forall \mathrm{x})\varphi \supset \varphi \longleftarrow \mathrm{sen}$

& &

$\varphi \supset (\forall \mathrm{x})\varphi \quad \mathrm{sen}_1$

$\big\downarrow$ (T3)

$((\forall \mathrm{x})\varphi \supset \varphi) \wedge (\varphi \supset (\forall \mathrm{x})\varphi) \longleftarrow \mathrm{sen} \wedge \mathrm{sen}_1$

$\|$

$((\forall \mathrm{x})\varphi \supset \varphi) \wedge (\varphi \supset (\forall \mathrm{x})\varphi) \longleftarrow (\mathrm{sen} \supset \mathrm{sen}_1) \wedge (\mathrm{sen}_1 \supset \mathrm{sen})$

$\big\downarrow$ (C5)

$(\forall \mathrm{x})\varphi \leftrightarrow \varphi \longleftarrow \mathrm{sen} \leftrightarrow \mathrm{sen}_1$

第二のシェマは，第一のシェマを用いてつぎのように証明される：

$(\forall \mathrm{x})\varphi \leftrightarrow \varphi \longleftarrow \mathrm{sen} \leftrightarrow \mathrm{sen}_1$

$\big\downarrow$ (C0)

$\neg\neg(\forall \mathrm{x})\varphi \leftrightarrow \varphi \longleftarrow \neg\neg\mathrm{sen} \leftrightarrow \mathrm{sen}_1$

$\|$

$\neg\neg(\forall \mathrm{x})\varphi \leftrightarrow \varphi \longleftarrow \neg\neg(\forall \mathrm{tvr})\mathrm{sen} \leftrightarrow \mathrm{sen}$

$\big\downarrow$ (C0)

$\neg\neg(\forall \mathrm{x})\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi \longleftarrow \neg\neg(\forall \mathrm{tvr})\neg\neg\mathrm{sen} \leftrightarrow \neg\neg\mathrm{sen}$

$\|$

$\neg\neg(\forall \mathrm{x})\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi \longleftarrow \neg\neg(\forall \mathrm{tvr})\neg\mathrm{sen} \leftrightarrow \neg\mathrm{sen}$

$\big\downarrow$ (C6)

$\neg(\exists \mathrm{x})(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi) \longleftarrow \neg(\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen} \leftrightarrow \neg\mathrm{sen}$

$\|$

$\neg(\exists \mathrm{x})\psi \leftrightarrow \neg\psi \longleftarrow \neg\mathrm{sen} \leftrightarrow \neg\mathrm{sen}_1$

$\big\downarrow$ (C6)

$(\exists \mathrm{x})\psi \leftrightarrow \psi \longleftarrow \mathrm{sen} \leftrightarrow \mathrm{sen}_1$

7 自然数論

本節では，自然数論が理論

$$\mathcal{T} = (\mathcal{G},\ \mathcal{G},\ \mathcal{U},\ \hat{\mathcal{U}})$$

として解釈可能であることを示す。

7.1 ペアノの公理まで

7.1.1 土台となる文生成システム

自然数論$\mathcal{T}$は，以下のように定義される文生成システム$\mathcal{G} = ({}^{\mathrm{N}}\mathrm{V},\ {}^{\mathrm{T}}\mathrm{V},\ \mathrm{P},\ \mathrm{SEN})$を土台とする。

(1) ${}^{\mathrm{N}}\mathrm{V}$は，§6.4で導入した“拡張された述語論理”——以下，単に“述語論理”と呼ぶ——の${}^{\mathrm{N}}\mathrm{V}$に

NUM：数項生成に関する

NVR：数変項記号生成に関する

を追加したもの。

(2) ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}$は，述語論理の${}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}$に

$'$：1変数関数記号

1：原初数定項記号

n：原初数変項記号

を追加したもの。

(3) Pは，述語論理のPに

$\mathrm{TRM} \to \mathrm{NUM}$

$\mathrm{TVR} \to \mathrm{NVR}$

$\mathrm{NUM} \to \mathrm{NUM}'$

$\mathrm{NUM} \to \mathrm{NVR}$

$\mathrm{NUM} \to 1$

$\mathrm{NVR} \to \mathrm{NVR}_1$

$\mathrm{NVR} \to \mathrm{n}$

を追加したもの[註]。

(註) この定義によって，式，項，変項，数項，数変項，がつぎのように定義されたことになる。

式は，数項の等式である。

項は，数項である。

変項は，数変項である；

数項は，

(1) 数変項は数項である；

(2) 原初数定項記号1は数項である；

(3) 数項に$'$を付け加えたものは，数項である；

(4) 上の(1)-(3)の適用で生成されるもののみが，数項で

ある．

数変項は，

(1) 原初数変項記号 n は数変項である。

(2) 数変項に $_1$ を付け加えたものは，数変項である；

(3) 上の(1)，(2)の適用で生成されるもののみが，数変項である．

特に，

$$
\begin{array}{llll}
1, & 1', & 1'', & \cdots\cdots \\
n, & n', & n'', & \cdots\cdots \\
n_1, & n_1', & n_1'', & \cdots\cdots \\
n_{11}, & n_{11}', & n_{11}'', & \cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots & &
\end{array}
$$

が数項の全体，かつ項全体をなす。

7.1.2　“式”，“文”

述語論理に倣い（§6.3.3），文生成システム $\mathcal{G}$ が生成する文を“式”と呼び，“文”の語は，“自由変項を含まない式”を指すものと約束する。

注意：変項は，n，n_1，n_{11}，……である。

7.1.3　式変形システム／推論システム

(I) $\mathcal{G}$ の上の文変形システム

$$\mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D}),\quad \mathcal{S}=(\overline{\mathcal{G}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$$

は，以下のようになる：

(1-1) $\overline{\mathcal{G}}=({}^{N}\overline{V},\ {}^{T}\overline{V},\ \overline{P},\ \overline{SEN})$：

(1-1-1) ${}^{N}\overline{V}$ は，述語論理の ${}^{N}\overline{V}$ に

$\overline{NUM}$，$\overline{N}$：数項シェマ記号の生成に関する

$\overline{NVR}$　：数変項シェマ記号の生成に関する

を追加したもの。

(1-1-2) ${}^{T}\overline{V}$ は，${}^{T}V$ と述語論理の ${}^{T}\overline{V}$ の合併に

num：原初数項シェマ記号

nvr：原初数変項シェマ記号

を追加したもの。

(1-1-3) $\overline{P}$ は，述語論理の $\overline{P}$ に，以下を追加したもの(註)：

$$
\begin{array}{l}
\overline{TRM}\to\overline{NUM} \\
\overline{NUM}\to\overline{NVR} \\
\overline{NUM}\to\overline{NUM}' \\
\overline{NUM}\to\overline{NVR} \\
\overline{NUM}\to\overline{1} \\
\overline{NUM}\to\overline{N} \\
\overline{N}\to\overline{N}_1 \\
\overline{N}\to num \\
\overline{NVR}\to\overline{NVR}_1 \\
\overline{NVR}\to nvr
\end{array}
$$

(1-2) σ は，述語論理の σ に

$$
\begin{array}{l}
\overline{NUM}\to NUM \\
\overline{NVR}\to NVR
\end{array}
$$

を追加したもの。

(1-3) $\mathcal{R}$，$\mathcal{D}$ は，述語論理のものと同じ。

(II) $\hat{\mathcal{U}}=(\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$ については，$\mathcal{U}$ の変更に対応する変更を行なうことの他に，つぎの“自然数の公理”を追加する：

(N0)　$num=num_1\to num'=num_1'$

(N1)　$\varepsilon\to\neg(num'=1)$

(N2)　$num'=num_1'\to num=num_1$

(N3)　$sen[nvr\downarrow 1]\wedge(sen\supset sen[nvr\downarrow nvr'])\to sen$

ここでの (N1)，(N2)，(N3) が，“ペアノの公理”と呼ばれているところのものである。

(註)　このとき，

$num,\ num_1,\ num_{11},\ \cdots\cdots$

$nvr,\ nvr_1,\ nvr_{11},\ \cdots\cdots$

が数項シェマ記号，数変項シェマ記号の全て。

7.1.4　命題論理，述語論理との関係

自然数論は，述語論理の上の理論であり，特に，命題論理の上の理論である。

7.2　加法と乗法の導入

7.2.1　加法と乗法の導入

$\mathcal{T}=(\mathcal{G},\ \mathcal{G},\ \mathcal{U},\ \hat{\mathcal{U}})$ を以下のように変更することで，自然数の加法と乗法を導入する。

(I) $\mathcal{G}$ に対し，

(1) ${}^{T}V$ に，記号

$$+,\ \times$$

を追加する；

(2) P に，

$$
\begin{array}{l}
TRM\to(TRM)+(TRM) \\
TRM\to(TRM)\times(TRM)
\end{array}
$$

を追加する。

(II) $\mathcal{U}=(\mathcal{S},\ \mathcal{D})$, $\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{G}},\ \sigma,\ \mathcal{R})$ に対し，

(1) $\overline{\mathcal{G}}$ の

(1.1) ${}^{\mathrm{T}}\overline{\mathrm{V}}$ に，記号

$$+,\ \times$$

を追加する；

(1.2) Pに，

$$\overline{\mathrm{TRM}} \rightarrow (\overline{\mathrm{TRM}})+(\overline{\mathrm{TRM}})$$
$$\overline{\mathrm{TRM}} \rightarrow (\overline{\mathrm{TRM}})\times(\overline{\mathrm{TRM}})$$

を追加する.

(2) $\mathcal{D}$ につぎの文変形規則を追加する：

(A1) $\mathrm{num}+1 \rightleftarrows \mathrm{num}'$

(A2) $\mathrm{num}+\mathrm{num}_1' \rightleftarrows (\mathrm{num}+\mathrm{num}_1)'$

(M1) $\mathrm{num}\times 1 \rightleftarrows \mathrm{num}$

(M2) $\mathrm{num}\times\mathrm{num}_1' \rightleftarrows \mathrm{num}\times\mathrm{num}_1+\mathrm{num}$

(III) $\mathcal{U}$ の変更に，$\hat{\mathcal{U}}=(\hat{\mathcal{S}},\ \hat{\mathcal{D}})$ の変更を対応させる。

7.2.2 加法，乗法の基本定理

つぎは，定理シェマである：

(0) $\mathrm{num}=\mathrm{num}_1$
$\supset \mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_1+\mathrm{num}_{11}$

(1) $\mathrm{num}+\mathrm{num}_1'=\mathrm{num}'+\mathrm{num}_1$

(2) $\mathrm{num}+\mathrm{num}_1=\mathrm{num}_1+\mathrm{num}$

(3) $(\mathrm{num}+\mathrm{num}_1)+\mathrm{num}_{11}$
$=\mathrm{num}+(\mathrm{num}_1+\mathrm{num}_{11})$

(4) $\mathrm{num}\times\mathrm{num}_1=\mathrm{num}_1\times\mathrm{num}$

(5) $(\mathrm{num}\times\mathrm{num}_1)\times\mathrm{num}_{11}$
$=\mathrm{num}\times(\mathrm{num}_1\times\mathrm{num}_{11})$

(6) $(\mathrm{num}+\mathrm{num}_1)\times\mathrm{num}_{11}$
$=\mathrm{num}\times\mathrm{num}_{11}+\mathrm{num}_1\times\mathrm{num}_{11}$

証明の例として，以下，(2)の証明を示す。

(2-1) 先ず，$1+1=1+1$ は定理：

$$\begin{array}{lcl} & & \varepsilon \\ & & \downarrow \text{(E1)} \\ 1+1=1+1 & \longleftarrow & \mathrm{trm}=\mathrm{trm} \end{array}$$

(2-2) 演繹定理を用いて

$$x+1=1+x \rightarrow x'+1=1+x'$$

を証明する：

$$\begin{array}{lcl} x+1=1+x & \longleftarrow & \mathrm{num}=\mathrm{num}_1 \\ & & \downarrow \text{(N0)} \\ (x+1)'=(1+x)' & \longleftarrow & \mathrm{num}'=\mathrm{num}_1' \\ \Vert & & \\ (x+1)'=(1+x)' & \longleftarrow & (\mathrm{num}+1)'=\mathrm{trm} \\ & & \downarrow \text{(A1)} \\ (x')'=(1+x)' & \longleftarrow & (\mathrm{num}')'=\mathrm{trm} \\ \Vert & & \\ (x')'=(1+x)' & \longleftarrow & \mathrm{num}'=\mathrm{trm} \\ & & \downarrow \text{(A1)} \\ x'+1=(1+x)' & \longleftarrow & \mathrm{num}+1=\mathrm{trm} \\ \Vert & & \\ x'+1=(1+x)' & \longleftarrow & \mathrm{trm}=(\mathrm{num}+\mathrm{num}_1)' \\ & & \downarrow \text{(A2)} \\ x'+1=1+x' & \longleftarrow & \mathrm{trm}=\mathrm{num}+\mathrm{num}_1' \end{array}$$

(2-3) $x+1=1+x$ の証明：

$$\begin{array}{lcl} 1+1=1+1 & \longleftarrow & \mathrm{sen}\ [\mathrm{nvr}\downarrow 1] \\ \& & & \& \\ x+1=1+n & & \mathrm{sen} \\ \quad\supset x'+1=1+x' & & \supset\mathrm{sen}\ [\mathrm{nvr}\downarrow \mathrm{nvr}'] \\ & & \downarrow \text{(N3)} \\ x+1=1+x & \longleftarrow & \mathrm{sen} \end{array}$$

(2-4) 演繹定理を用いて

$$x+b=b+x \supset x+b'=b'+x$$

を証明する。

$$\begin{array}{lcl} x+b=b+x & \longleftarrow & \mathrm{num}=\mathrm{num}_1 \\ & & \downarrow \text{(N0)} \\ (x+b)'=(b+x)' & \longleftarrow & \mathrm{num}'=\mathrm{num}_1' \\ \Vert & & \\ (x+b)'=(b+x)' & \longleftarrow & (\mathrm{num}+\mathrm{num}_1)'=\mathrm{trm} \\ & & \downarrow \text{(A2)} \\ x+b'=(b+x)' & \longleftarrow & \mathrm{num}+\mathrm{num}_1'=\mathrm{trm} \\ \Vert & & \\ x+b'=(b+x)' & \longleftarrow & \mathrm{trm}=(\mathrm{num}+\mathrm{num}_1)' \\ & & \downarrow \text{(A2)} \\ x+b'=b+x' & \longleftarrow & \mathrm{trm}=\mathrm{num}+\mathrm{num}_1' \\ & & \downarrow \text{(1)} \\ x+b'=b+x' & \longleftarrow & \mathrm{trm}=\mathrm{trm}_1 \\ \& & & \& \\ b+x'=b'+x & & \mathrm{trm}_1=\mathrm{trm}_{11} \\ & & \downarrow \text{(E3)} \\ x+b'=b'+x & \longleftarrow & \mathrm{trm}=\mathrm{trm}_{11} \end{array}$$

(2-5) 最後に，$a+b=b+a$ がつぎのように証明される：

$$
\begin{array}{lll}
a+1=1+a & \longleftarrow & \mathrm{sen}\ [\mathrm{nvr}\downarrow 1] \\
\& & & \& \\
a+x=x+a & & \mathrm{sen} \\
\quad \supset a+x'=x'+a & & \supset \mathrm{sen}\ [\mathrm{nvr}\downarrow \mathrm{nvr}'] \\
 & & \quad \downarrow (\mathrm{N3}) \\
a+x=x+a & \longleftarrow & \mathrm{sen} \\
 & & \quad \downarrow (\mathrm{Q0}) \\
a+b=b+a & \longleftarrow & \mathrm{sen}\ [\mathrm{tvr}\downarrow \mathrm{trm}]
\end{array}
$$

7.3　順序関係の導入

7.3.1　順序関係の導入

自然数論 $\mathcal{T}=(\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{U}, \hat{\mathcal{U}})$ を以下のように拡張することで，自然数の順序関係≦を導入する。

(1)　$\mathcal{G}$ に対し，

(1-1)　${}^{T}V$ に，記号<, ≦を追加する。

(1-2)　P に，

$\mathrm{SEN}\to(\mathrm{NUM})<(\mathrm{NUM})$

$\mathrm{SEN}\to(\mathrm{NUM})\leqq(\mathrm{NUM})$

を追加する。

(2)　$\mathcal{U}=(\mathcal{S}, \mathcal{D})$，$\mathcal{S}=(\overline{\mathcal{G}}, \sigma, \mathcal{R})$ の $\overline{\mathcal{G}}$ に対し，

(2-1)　${}^{T}\overline{V}$ に，記号<, ≦を追加する。

(2-2)　$\overline{P}$ に，

$\overline{\mathrm{SEN}}\to(\overline{\mathrm{NUM}})<(\overline{\mathrm{NUM}})$

$\overline{\mathrm{SEN}}\to(\overline{\mathrm{NUM}})\leqq(\overline{\mathrm{NUM}})$

を追加する。

(3)　$\mathcal{D}$ に，

$(\exists(\mathrm{nvr}))(\mathrm{num}+\mathrm{nvr}=\mathrm{num}_1)\rightleftarrows \mathrm{num}<\mathrm{num}_1$

$\mathrm{num}\leqq\mathrm{num}_1\rightleftarrows\neg(\mathrm{num}<\mathrm{num}_1)\supset(\mathrm{num}=\mathrm{num}_1)$

$\qquad(\rightleftarrows(\mathrm{num}<\mathrm{num}_1)\vee(\mathrm{num}=\mathrm{num}_1))$

を追加する。

(4)　$\mathcal{U}$ の変更に対応して，$\hat{\mathcal{U}}$ を変更する。

7.3.2　順序関係の基本定理

以下は定理シェマであり，≦が順序関係であることを示す：

(1)　$\mathrm{num}\leqq\mathrm{num}$

(2)　$((\mathrm{num}\leqq\mathrm{num}_1)\wedge(\mathrm{num}_1\leqq\mathrm{num}))$
$\qquad\supset\mathrm{num}=\mathrm{num}_1$

(3)　$((\mathrm{num}\leqq\mathrm{num}_1)\wedge(\mathrm{num}_1\leqq\mathrm{num}_{11}))$
$\qquad\supset\mathrm{num}\leqq\mathrm{num}_{11}$

また，(2)の証明では，証明すべき定理シェマとして以下のものが問題になる：

[1]　$\neg(\mathrm{num}'=\mathrm{num})$

[2]　$\neg(\mathrm{num}+\mathrm{num}_1=\mathrm{num})$

[3]　$((\mathrm{trm}=\mathrm{trm}_1)\wedge\neg(\mathrm{trm}=\mathrm{trm}_{11}))$
$\qquad\supset\neg(\mathrm{trm}_1=\mathrm{trm}_{11})$

[4]　$\mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_1\supset\neg(\mathrm{num}=\mathrm{num}_1)$

[5]　$\mathrm{num}<\mathrm{num}_1\supset\neg(\mathrm{num}=\mathrm{num}_1)$

[6]　$\neg(\mathrm{num}<\mathrm{num})$

[7]　$\mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_1\supset\mathrm{num}<\mathrm{num}_1$

[8]　$(\mathrm{num}<\mathrm{num}_1\wedge\mathrm{num}_1<\mathrm{num}_{11})\supset\mathrm{num}<\mathrm{num}_{11}$

ここでは，つぎのことを確認する意味で，(2)の証明に至るこれらの定理シェマの証明をすべて示すことにする：

《手続きとして示せば極めて煩瑣なことを，手続きを殊更意識に上らせずにわれわれのカラダは実践できる》

[1]　(N1) より　$\neg(1'=1)$。また，

$$
\begin{array}{lll}
(a')'=a' & \longleftarrow & \mathrm{num}'=\mathrm{num}_1' \\
 & & \quad \downarrow (\mathrm{N2}) \\
a'=a & \longleftarrow & \mathrm{num}=\mathrm{num}_1
\end{array}
$$

より，

$$\neg(a'=a)\supset\neg((a')'=a')$$

よって，(N3) から所期の定理シェマを得る。

[2]　先ず，$\neg(1+b=1)$：

$$
\begin{array}{lll}
 & & \quad \varepsilon \\
 & & \quad \downarrow (\mathrm{N1}) \\
\neg(b'=1) & \longleftarrow & \neg(\mathrm{num}'=1) \\
 & & \quad \downarrow (\mathrm{A1}) \\
\neg(b+1=1) & \longleftarrow & \neg(\mathrm{num}+1=1) \\
\quad \| & & \\
\neg(b+1=1) & \longleftarrow & \neg(\mathrm{num}+\mathrm{num}_1=1) \\
 & & \quad \downarrow \S 7.2.2,\ (2) \\
\neg(1+b=1) & \longleftarrow & \neg(\mathrm{num}_1+\mathrm{num}=1)
\end{array}
$$

また，

$$
\begin{array}{lll}
a'+b=a' & \longleftarrow & \mathrm{num}+\mathrm{num}_1=\mathrm{num}_{11} \\
 & & \quad \downarrow \S 7.2.2,\ (1) \\
b+a'=a' & \longleftarrow & \mathrm{num}_1+\mathrm{num}=\mathrm{num}_{11} \\
\quad \| & & \\
b+a'=a' & \longleftarrow & \mathrm{num}+\mathrm{num}_1'=\mathrm{num}_{11}
\end{array}
$$

$\downarrow$ (A2)

$(b+a)'=a'$ $\longleftarrow$ $(num+num_1)'=num_{11}$

$\|$

$(b+a)'=a'$ $\longleftarrow$ $num'=num_1'$

$\downarrow$ (N2)

$b+a=a$ $\longleftarrow$ $num+num_1=num_{11}$

$\downarrow$ (E2)

$a+b=a$ $\longleftarrow$ $num_1+num=num_{11}$

よって，$\neg(a+b=a)\supset\neg(a'+b=a')$。(N3)から，$\neg(a+b=a)$。

[3]項 f, g, h(記号‘f’, ‘g’, ‘h’ はメタ記号)に対し，以下の両方向の変形が成り立つ：

$(f=g)\wedge\neg(f=h)\supset\neg(g=h)$ $\longleftarrow$ $sen\wedge sen1\supset sen11$

$\updownarrow$ (C4)

$\neg((f=g)\supset\neg\neg(f=h))\supset\neg(g=h)$ $\longleftarrow$ $\neg(sen\supset\neg sen_1)\supset sen_{11}$

$\|$

$\neg((f=g)\supset\neg\neg(f=h))\supset\neg(g=h)$ $\longleftarrow$ $\neg sen_1\supset\neg sen$

$\updownarrow$ (T7), (C1)

$(g=h)\supset((f=g)\supset\neg\neg(f=h))$ $\longleftarrow$ $sen\supset sen_1$

$\|$

$(g=h)\supset((f=g)\supset\neg\neg(f=h))$ $\longleftarrow$ $sen_{11}\supset(sen_1\supset\neg\neg sen)$

$\updownarrow$ (C1)

$(g=h)\supset((f=g)\supset(f=h))$ $\longleftarrow$ $sen_{11}\supset(sen_1\supset sen)$

一方，$(g=h)\supset((f=g)\supset(f=h))$ は，(E3) より定理。

[4]

$a+c=b$ (仮定) $\longleftarrow$ sen

$\downarrow$ [2]

$a+c=b$ & $\neg(a+c=a)$ $\longleftarrow$ sen & $\neg(num+num_1=num)$

$\|$

$a+c=b$ & $\neg(a+c=a)$ $\longleftarrow$ $trm=trm_1$ & $\neg(trm=trm_{11})$

$\downarrow$ [3]

$\neg(b=a)$ $\longleftarrow$ $\neg(trm_1=trm_{11})$

$\|$

$\neg(b=a)$ $\longleftarrow$ $\neg(trm=trm_1)$

$\downarrow$ [2]

$\neg(a=b)$ $\longleftarrow$ $\neg(trm_1=trm)$

[5]数項a, bと，これらの中に自由変項として現われない数変項xに対し，

$a<b$ $\longleftarrow$ $num<num_1$

$\downarrow$ (定義)

$(\exists x)(a+x=b)$ $\longleftarrow$ $(\exists num_{11})(num+num_{11}=num_1)$

$\downarrow$ [4]

$(\exists x)(a+x=b)$ & $(a+x=b)\supset\neg(a=b)$ $\longleftarrow$ $(\exists num_{11})(num+num_{11}=num_1)$ & $(num+num_{11}=num_1)\supset\neg(num=num_1)$

$\downarrow$ (Q4)

$(\exists x)(a+x=b)$ & $(\exists x)(a+x=b)\supset(\exists x)(\neg(a=b))$ $\longleftarrow$ $(\exists num_{11})(num+num_{11}=num_1)$ & $(\exists num_{11})(num+num_{11}=num_1)\supset(\exists num_{11})(\neg(num=num_1))$

$\downarrow$ (MP)

$(\exists x)(\neg(a=b))$ $\longleftarrow$ $(\exists num_{11})(\neg(num=num_1))$

$\|$

$(\exists x)(\neg(a=b))$ $\longleftarrow$ $(\exists trv)nf\ [tvr]$

$\downarrow$ (Q3)

$\neg(a=b)$ $\longleftarrow$ $nf\ [tvr]$

[6]

ε

$\downarrow$ (E1)

$a=a$ $\longleftarrow$ $trm=trm$

$\|$

$a=a$ $\longleftarrow$ $num=num_1$

$\downarrow$ [5]

$\neg(a<a) \longleftarrow \neg(\mathrm{num}<\mathrm{num}_1)$

[7] 数項a, b, cと，これらの中に自由変項として現われない数変項xに対し，

$a+c=b \longleftarrow \mathrm{sen}\ [\mathrm{trv}\downarrow \mathrm{trm}]$

$\downarrow$ (Q1)

$(\exists x)(a+x=b) \longleftarrow (\exists \mathrm{trv})\mathrm{sen}$

$\|$

$(\exists x)(a+x=b) \longleftarrow (\exists \mathrm{num}_{11})(\mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_1)$

$\downarrow$ (定義)

$a<b \longleftarrow \mathrm{num}<\mathrm{num}_1$

[8] 数項a, b, cと，これらの中に自由変項として現われない数変項x, yに対し，

$a<b\wedge b<c \longleftarrow \mathrm{num}<\mathrm{num}_1\wedge \mathrm{sen}$

$\downarrow$

$(\exists x)(a+x=b)\wedge b<c \longleftarrow (\exists \mathrm{num}_{11})(\mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_1)\wedge \mathrm{sen}$

$\|$

$(\exists x)(a+x=b)\wedge b<c \longleftarrow \mathrm{sen}\wedge \mathrm{num}<\mathrm{num}_1$

$\downarrow$

$(\exists x)(a+x=b)\wedge(\exists y)(b+y=c) \longleftarrow \mathrm{sen}\wedge(\exists \mathrm{num}_{11})(\mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_1)$

$\|$

$(\exists x)(a+x=b)\wedge(\exists y)(b+y=c) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen}\wedge \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$\downarrow$ (Q2)

$(\exists x)(a+x=b\wedge(\exists y)(b+y=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{sen}\wedge \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}])$

$\|$

$(\exists x)(a+x=b\wedge(\exists y)(b+y=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]\wedge(\exists \mathrm{tvr})\mathrm{sen})$

$\downarrow$ (Q2)

$(\exists x)((\exists y)(a+x=b\wedge b+y=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]\wedge \mathrm{sen}))$

$\|$

$(\exists x)((\exists y)(a+x=b\wedge b+y=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{num}=\mathrm{num}_1\wedge \mathrm{num}_1+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_{111}))$

$\downarrow$ §7.2.2, (0), (Q4)

$(\exists x((\exists y))((a+x)+y=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_{111}))$

$\|$

$(\exists x)((\exists y)((a+x)+y=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})((\mathrm{num}+\mathrm{num}_1)+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_{111}))$

$\downarrow$ (Q4)

$(\exists x)((\exists y)(a+(x+y)=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{num}+(\mathrm{num}_1+\mathrm{num}_{11})=\mathrm{num}_{111}))$

$\|$

$(\exists x)((\exists y)(a+(x+y)=c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})(\mathrm{num}+\mathrm{num}_{11}=\mathrm{num}_1))$

$\downarrow$ (Q4)

$(\exists x)((\exists y)(a<c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})\mathrm{num}<\mathrm{num}_1)$

$\|$

$(\exists x)((\exists y)(a<c)) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)((\exists \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}])$

$\downarrow$ (Q3)

$(\exists x)(a<c) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr}_1)\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$\|$

$(\exists x)(a<c) \longleftarrow (\exists \mathrm{tvr})\mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

$\downarrow$ (Q3)

$a<c \longleftarrow \mathrm{nf}\ [\mathrm{tvr}]$

(2)　の証明：

$a\leqq b\wedge b\leqq a \longleftarrow \mathrm{num}\leqq \mathrm{num}_1\wedge \mathrm{sen}$

$\downarrow$ (定義)

$((\neg(a<b)\supset a=b)\wedge(b\leqq a) \longleftarrow (\neg(\mathrm{num}<\mathrm{num}_1)\supset \mathrm{num}=\mathrm{num}_1)\wedge \mathrm{sen}$

$\|$

$((\neg(a<b)\supset a=b)\wedge(b\leqq a) \longleftarrow \mathrm{sen}\wedge(\mathrm{num}<\mathrm{num}_1)$

$\downarrow$ (定義)

$(\neg(a<b)\supset a=b)\wedge(\neg(b<a)\supset a=b) \longleftarrow \mathrm{sen}\wedge(\neg(\mathrm{num}<\mathrm{num}_1)\supset \mathrm{num}=\mathrm{num}_1)$

$\Vert$		
$(\neg(a<b)\supset a=b)$	$\longleftarrow$	$(sen\supset sen_{11})$
$\wedge(\neg(b<a)\supset a=b)$		$\wedge(sen_1\supset sen_{11})$
		$\downarrow$ (T9)
$(\neg(a<b)$	$\longleftarrow$	$(sen\vee sen_1)$
$\vee\neg(b<a))$		
$\supset a=b$		$\supset sen_{11}$
		$\downarrow$
$\neg(a<b\wedge b<a)$	$\longleftarrow$	$\neg(sen\wedge sen_1)$
$\supset a=b$		$\supset sen_{11}$
$\Vert$		
$\neg(a<b\wedge b<a)$	$\longleftarrow$	sen
$\supset a=b$		$\supset sen_1$
		$\downarrow$
$\neg(a=b)$	$\longleftarrow$	$\neg sen_1$
$\supset(a<b\wedge b<a)$		$\supset sen$
		$\downarrow$ [8]
$\neg(a=b)$	$\longleftarrow$	sen
$\supset(a<b\wedge b<a)$		
&		&
$(a<b$		$(num<num_1$
$\wedge b<a)$		$\wedge num_1<num_{11})$
$\supset(a<a)$		$\supset(num<num_{11})$
$\Vert$		
$\neg(a=b)$	$\longleftarrow$	sen
$\supset(a<b\wedge b<a)$		$\supset sen_1$
&		&
$(a<b\wedge b<a)$		sen_1
$\supset(a<a)$		$\supset sen_{11}$
		$\downarrow$
$\neg(a=b)\supset(a<a)$	$\longleftarrow$	$sen\supset sen_{11}$
$\Vert$		
$\neg(a=b)\supset(a<a)$	$\longleftarrow$	$sen\supset sen_1$
		$\downarrow$
$\neg(a<a)\supset a=b$	$\longleftarrow$	$\neg sen_1\supset\neg sen$
		$\downarrow$ [6]
$\neg(a<a)\supset a=b$	$\longleftarrow$	$sen\supset sen_1$
&		&
$\neg(a<a)$		sen
		$\downarrow$
$a=b$	$\longleftarrow$	sen_1