“数/量”の主題探求 (2)

宮　下　英　明

目　　次

平成5年4月15日受理

5　“数”の実現

本章では，“数”の実現——《“数”という形式をもつものの実現》として——の実際を述べる。

“数”の実現は純粋に各論である。しかしもちろん，“数”は実現のために実現されたものではない。数の実現は既に知られているものの理論的後追いである。

この作業は，自然数から出発する。自然数の本義は（“ペアノの公理”という形で定式化されるところの）“系列”である。

“数”の実現は，以下，“数の拡張”という形で進められる。

最初の拡張のアイデアは，比の系と差の系の導出である。差の系の導出は“数の系の対称化”でもある。

自然数の系に対するこの拡張は，分数の系と整数の系をもたらす。さらに，分数の差の系の導出ないし整数の比の系の導出として，有理数の系が導出される。そして，比の系と差の系の導出という形での数の拡張は，有理数で閉じる。

有理数の系から新しい数の系を導出するアイデアは，連続化である。実際，連続化の方法によって実数の系が得られる。そして，連続化による数の拡張はここで閉じる（“実数の連続性”）。

実数の系から新しい数の系を導出するアイデアは，多元体への拡張である。実際，実数体$\mathbb{R}$の２次元多元体への拡張として複素数の系が，４次元多元体への拡張として四元数の系が，それぞれ得られる。

5.1　自然数の実現と“数の拡張”

色々な“数”の実現は，はじめに自然数を実現し，以下“既に得られている数を拡張する”という形で行なうことができる。実際，自然数から出発して，“数の拡張”の形で整数，有理数，実数，複素数，四元数が順次構成される。

“数の拡張”——数の系の拡張——の主題化は“数の系”の規準の主題化を含んでいる。“数の系”の規準がなければ，“数の拡張”を言うことはできない。本稿では，§3.1において“数の系”を規定を試みた(註)。

自然数から四元数までの拡張を見るときに特定されてくる〈数拡張の方法〉は，“比の系”の導出，“差の系”の導出，連続化（完備化），次元の拡張である。

（註）ちなみに，“数の拡張”は“形式不易の原理”に従うものとして発想されるが“形式不易の原理”の言い回しの中の“形式”に対する伝統的な説明は，“数の系”の規準を述べるものとしては不十分である。

5.2　系列としての自然数

5.2.1　系列

自然数の定義は，日常語で謂う“系列”の数学的定式化であり，“ペアノの公理”と呼ばれているところのものである。ペアノの公理は“系列”の規定であり，“自然数”は“系列”に他ならない。

ここで“系列”とは，図式

$$\bigcirc \to \bigcirc \to \bigcirc \to \cdots\cdots$$

でイメージされるところのものである。ことばで言うと，

はじめ，はじめのつぎ，
　　はじめのつぎのつぎ，‥‥

が，系列である。

5.2.2　“ペアノの公理”

〈自然数＝系列〉の定義になるペアノの公理を確認しておこう。

“系列”とは，先ず，集合$\boldsymbol{E}$と，$\boldsymbol{E}$の一つの要素１と関数succ：$\boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E}$の組

$$(\boldsymbol{E},\ 1,\ \mathrm{succ})$$

である。そしてこれについて，以下のことが成立している：

1°　$\mathrm{succ}(\boldsymbol{x})=1$となる$\boldsymbol{E}$の要素$\boldsymbol{x}$は存在しない；

2°　$\boldsymbol{E}$の要素$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$について$\mathrm{succ}(\boldsymbol{x})=\mathrm{succ}(\boldsymbol{y})$

ならば$x=y$；

3°　Eの部分集合E'は，つぎの条件を満たすとき，実はEと一致している：

1がE'の要素になっている；

xがE'の要素のとき，succ(x) もE'の要素．

5.2.3　"ペアノの公理"の読み方

"何でこれが系列の定義か？"という感じであるが，これで系列の定義になっている。

先ず，系列の図式

○→○→○→‥‥

に対し，これの項全体の集合が集合Eであり，そして先頭の項が1である。succは，各項にその直後の項を対応させる関数である。

succが対応一般（一つの要素に複数の要素が対応することを許す）ではなく，一意対応（一つの要素に一つの要素が，しかもただ一つの要素が，対応する）としての関数であるということは，つぎのことに効いている。即ち，系列の図式は，

　　　　　　○→○→‥‥
　　　　　↗
‥‥→○→○
　　　　　↘
　　　　　　○→○→‥‥

のように枝分かれするものではないが，この枝分かれを禁止するのが，succが一意対応であるという条件である。

"何の後でもない"が"先頭"の意味である。そこで，条件1°によって，1を先頭として定義している。

ここで，先頭が一つに限るのかどうか心配になる。しかし大丈夫である。——仮に他にも先頭があったとしよう。このとき，別々の先頭から出発する列は先でつながることはない。というのも，条件2°によって

‥‥→○→○
　　　　　↘
　　　　　　○→○→‥‥
　　　　　↗
‥‥→○→○

の形が禁止されるからである。そこで，他にも先頭があった場合の可能性として残るのは，Eが互いに独立した複数の系列で成るという状態である。しかしこの状態は，条件3°によって禁止される。実際，

①→○→‥‥　　：E'
　　　　　　　　　　$\Big\}\ E$
○→○→‥‥

のようにE'をとると，E'は3°の中のE'の条件を満たしているから$E'=E$でなければならない。結局，Eは一本の系列でなければならないことになる。

また条件2°は，系列にループが含まれる状態

→○→○→ ‥‥ →○→○→○

を禁止することにも効いている。実際，

→○→○→ ‥‥ →○→○→○
　　x　　　　　　　　　　y

とすると，これはsucc(x)=succ(y) の場合である。ところがこのときには，条件2°より$x=y$になってしまう。

特に，系列は無際限に続かねばならない。

5.2.4　自然数の同型

任意の二つの自然数の系（ℕ，1，succ），（ℕ*，1*，succ*）は，つぎの意味で"同型"である。即ち，ℕのℕ*の上の1対1対応（コピー）fで，つぎの条件を満たすものが存在する：

$$f(1)=1^*$$
$$f(\mathrm{succ}(x))=\mathrm{succ}^*(f(x))$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}: & 1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & x \arrow[r, "\mathrm{succ}"] \arrow[d, "f"] & y \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \\
\mathbb{N}^*: & 1^* \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & x^* \arrow[r, "\mathrm{succ}^*"'] & y^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

そこで自然数は，“同型”による同一視から，ただ一つとなる。

5.3 〈自然数＝系列〉の実現

自然数の形式を述べる——“ペアノの公理”の形で述べる——ことと，この形式をもつ諸対象を実現することとは，別の話である。

自然数の実現は，現実的であろうとするならば，

《有限個の記号の組み合わせで自然数を無際限に生成する（あるいは，無際限ではなくとも，生活の上で問題になる程度の大きさの自然数まで生成する)》

という形のものである他ない。

公的な“自然数”として，アラビア式，中国式，ローマ式等がある。後の二つは，自然数を無限に生成するものにはなっておらず，理論的には“自然数”と言えないが，実用的には——理論的に自然数であるものと応用性は同じ，という意味で——“自然数”と言える。

数学では，集合論において，“入れ籠型”と形容されるアルゴリズムで自然数がつくられる。即ち，空集合 ϕ をもとに，

$\{\phi\}$,
$\{\phi,\{\phi\}\}$,
$\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$,
$\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}\}$,
$\cdots\cdot$

のように生成されるものを自然数と定義する。

はじめ，はじめのそのつぎ，はじめのそのつぎのそのつぎ，････　も自然数である(註)。

ここで強調されるべきは，これらが自然数の表現（“自然数”という形をもつものの表現）ではなく，まさに自然数の実現（“自然数”という形をもつものの実現）だということである。——自然数を実現する以前に自然数はない。“自然数”という〈形〉を定義することは，自然数を存在させることではない。

（註）これの生成規則は，つぎのようになる：

(1)　記号列“はじめ”は自然数である．

(2)　記号列 x が自然数のとき，記号列“x のそのつぎ”が $\mathrm{succ}(x)$ としての自然数である．

(3)　規則(1)，(2)で定義される自然数が自然数の全てである．

5.4 〈自然数＝数の系〉の実現

5.4.1　数の系の実現

“系列”の実現は，まだ“数の系”の実現ではない。数の系としての自然数の実現の内容は，系列への加法＋と乗法×の導入である。

自然数の和，積の導入は，自然数の使用が主題になる〈外〉に，その理由をもつ。しかし，その使用は，〈内〉だけを用いて記述可能であるところの形式をもつ。——一般に，〈外〉に存在の理由をもつことは，それが〈内〉によって記述されることを妨げない。

実際，自然数の和，積は，専ら“系列”の上の算法として導入できる。それはつぎのように定義される：

$$x+1=\mathrm{succ}(x)$$
$$x+\mathrm{succ}(y)=\mathrm{succ}(x)+y$$
$$x\times 1=x$$
$$x\times\mathrm{succ}(y)=x\times y+x$$

5.4.2　零を含む自然数の系

加法，乗法の定義を変更することで，先頭の自然数を零元にすることができる —— こうして，“零を伴う自然数”を実現することができる。

実際，先頭の自然数を０と書くとき，＋，×をつぎのように定義する：

$$x+0=x$$
$$x+\mathrm{succ}(y)=\mathrm{succ}(x)+y$$

$$x \times 0 = 0$$
$$x \times \mathrm{succ}(y) = x \times y + x$$

なお，本稿では零元をもたらす＋，×の定義は採らない。

5.4.3　順序構造

自然数の間の先後関係として，順序関係≦がつぎのように定義される。

x，$y \in \mathbb{N}$ の間の関係 $\mathrm{succ}(x)=y$（"x のつぎは y"）を，

$$x \to y$$

で表わす。さらに，x，$y \in \mathbb{N}$ に対し，

(1)　x_1，x_2，‥‥，$x_n \in \mathbb{N}$ で

$$x = x_1 \to x_2 \to \quad \cdots \quad \to x_n = y$$

となるものが存在することを

$$x < y$$

で　表わす。

(2)　$x=y$ か $x<y$ であることを，

$$x \leqq y$$

で表わす。

即ち，≦は"先後関係"である。そしてこれは，$\mathbb{N}$ の上の順序関係——実際，全順序関係（線型順序関係）——になる。さらに，$\mathbb{N}$ は≦に関して整列集合[註]になる。

こうして，自然数＝系列には，順序関係が定義されることになり，またこの意味で，順序構造が与えられることになる。

（註）順序集合Xは，条件：

《任意の部分集合が最小元をもつ》

を満たすとき，整列集合であると言う。

整列集合は，全順序集合である（"整列していれば，一列になっている"）。

有限順序集合では，"全順序"と"整列"の概念は，一致する。——日常語において，"整列している"（どの部分も最小の要素をもつ）と"一列に並んでいる"（どの二要素も比較可能）は同義！

例：

(1)　$\mathbb{N}$ は，標準的な順序構造に関して整列集合。

(2)　整数は標準的な順序構造に関して，全順序集合であるが，整列集合ではない。しかし，例えばつぎのような順序関係の導入で，整列化できる：

$$0 < 1 < -1 < 2 < -2 < 3 < -3 < \cdots\cdot$$

なお，選択公理の下で，つぎが定理となる：

《任意の集合は，整列化可能》

5.4.4　系（$\mathbb{N}$，＋，×，≦）

自然数の系は，順序関係≦に関して，順序構造を伴う数の系になる。

これの標準的位相（即ち，順序位相）は，離散である。

5.5　有理数導出までの"数の拡張"方法——比の系と差の系の導出

自然数以下の"数の構成"は，有理数がゴールの場合には，つぎの二つの生活実践的機能拡張の目的でなされる。一つは，量の自然数比の表現とそれを計算にのせることであり，そしてもう一つは，量の対称化の表現とそれを計算にのせることである。

この拡張は，自然数の系（$\mathbb{N}$，＋，×）から出発する"比の系と差の系の導出"になる。

そしてこの拡張は，

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N}_R \arrow[dr] & \\ \mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{N}_{RD} \\ & \mathbb{N}_D \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

のように，$\mathbb{N}_{RD}$ $(=(\mathbb{N}_R)_D=(\mathbb{N}_D)_R)$ が終点になって終わる[註1]。そして，$\mathbb{N}_R$ が分数の系（$\mathbb{B}$ で表わす），$\mathbb{N}_D$ が整数の系 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}_{RD}$ が有理数の系 $\mathbb{Q}$ ということになる。

この意味で，整数 $\mathbb{Z}$ と"分数"$\mathbb{B}$ は，二つのパラレルな自然数拡張として，主題になる[註2]。

（註1）既に一般的に示したように，$(\mathbb{N}_R)_R$ は $\mathbb{N}_R$ と，$(\mathbb{N}_D)_D$ は $\mathbb{N}_D$ と，$(\mathbb{N}_R)_D$ は $(\mathbb{N}_D)_R$ と，$((\mathbb{N}_R)_D)_R$ は $(\mathbb{N}_R)_D$ と，そして $((\mathbb{N}_D)_R)_D$ は $(\mathbb{N}_R)_D$

と，それぞれ同型になり，結局“比の系と差の系の導出”を方法とするこの拡張は，図のように閉じる。

（註２）$\mathbb{B}=\mathbb{N}_R$に対する通常の呼び方は“正の有理数の系”である。しかし，有理数$\mathbb{N}_{RD}$が$\mathbb{N}_R$の後に出て来るものであること，$\mathbb{N}_R$が整数の$\mathbb{N}_D$と並ぶ身分であること，そして$\mathbb{N}_R$が算数科教材では“分数”として独立した主題を成していることを考えれば，本来，これにも何か一つの名を与え，見掛けともども独立の系として確立しておくべきであろう。

5.6　分数の系$\mathbb{B}$の導出——$\mathbb{N}_R$としての$\mathbb{B}$

分数の系（$\mathbb{B}$，＋，×），（$\mathbb{B}$，＋，×，≦）は，それぞれ自然数の系（$\mathbb{N}$，＋，×），（$\mathbb{N}$，＋，×，≦）に対する（$\mathbb{N}_R$，＋，×），（$\mathbb{N}_R$，＋，×，≦）である。

（$\mathbb{B}$，＋，×，≦）については“アルキメデス（Archimedes）の公理”と呼ばれるつぎのことが成り立つ：

任意の$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}$に対し，$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{n}>\boldsymbol{y}$となる$\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$が存在する．

5.7　整数の系$\mathbb{Z}$の導出——$\mathbb{N}_D$としての$\mathbb{Z}$

整数の系（$\mathbb{Z}$，＋，×），（$\mathbb{Z}$，＋，×，≦）は，それぞれ自然数の系（$\mathbb{N}$，＋，×），（$\mathbb{N}$，＋，×，≦）に対する（$\mathbb{N}_D$，＋，×），（$\mathbb{N}_D$，＋，×，≦）である。

（$\mathbb{Z}$，＋，×，≦）は，順序可換環になる。

5.8　有理数の系$\mathbb{Q}$の導出——$\mathbb{B}_D$および$\mathbb{Z}_R$としての$\mathbb{Q}$

分数の差の系と整数の比の系は，それぞれ$\mathbb{N}_{RD}$，$\mathbb{N}_{DR}$として，同型である。この同型において一つの対象と見られた系が有理数の系$\mathbb{Q}$である。

有理数の系$\mathbb{Q}$は，順序構造を伴う数の系（$\mathbb{Q}$，＋，×，≦）になる。

また，（$\mathbb{Q}$，＋，×，≦）は順序可換体であり，そして$\mathbb{Q}$の拡大体で順序体であるものは順序体$\mathbb{Q}$の順序拡大体である（註）。

（$\mathbb{Q}$，＋，×，≦）は“アルキメデスの公理”を満たす。一般に，順序体$\boldsymbol{N}$は，アルキメデスの公理を満たすときアルキメデス的であると言われる。

（註）実際，$\mathbb{Q}$の拡大体となる順序体の構造は$\mathbb{Q}$に順序体の構造を導くが，$\mathbb{Q}$は一意的にしか順序づけられない。

5.9　実数の系$\mathbb{R}$の導出

5.9.1　分数の系$\mathbb{B}$および有理数の系$\mathbb{Q}$の連続化

分数の連続化として正の実数$\mathbb{R}^+$が導入される。

また，$\mathbb{R}^+$の差の系として，あるいは有理数$\mathbb{Q}$の連続化（註）として，実数$\mathbb{R}$が導入される。

（註）“連続性”は，稠密な順序集合$\boldsymbol{A}$に関して，つぎの“連続性の公理”を満たすことと定義される：

$\boldsymbol{A}$の，上に有界な部分集合$\boldsymbol{M}$にはその上限$\sup \boldsymbol{M}$が存在し，下に有界な部分集合$\boldsymbol{M}$にはその下限$\inf\ \boldsymbol{M}$が存在する．

5.9.2　二つの導入法——デデキント流とカントール流

有理数の系からの実数の系の導入法には，“切断”をアイデアとするデデキント流と“コーシー列”をアイデアとするカントール流の二つがある。

しかしこれは，有理数までの数の系の実現とは様相を異にしている。即ち，実数の系を導入する方法は，アルゴリズムになっていない。この意味で，実数の系は実現されるわけではない。無理数をひとつひとつ同定していくことが，実数の系を明示的なものにする唯一の方法である。

5.9.3　$\mathbb{R}$の中への$\mathbb{Q}$の埋め込み

有理数の系は，つぎのようにして，実数の系に埋め込まれる。即ち，有理数$\boldsymbol{q}$を，

(1)　デデキント流の導入法では，$\boldsymbol{q}$を切り口にもつ切断の類と同一視する．

(2)　カントール流の導入法では，$\boldsymbol{q}$を極限と

するコーシー列の類と同一視する.

5.9.4 $\mathbb{R}$の連続性――デデキント/カントール流の数導出法が閉じていること

連続化の方法では，$\mathbb{R}^{+}$および$\mathbb{R}$から新しい系を導出することはできない（"実数の連続性"）。

5.10 複素数

5.10.1 実数から複素数への拡張

実数$\mathbb{R}$から複素数$\mathbb{C}$への拡張は，体$\mathbb{R}$上の2次元の多元体（二元体）の導出である[註]。$\mathbb{C}$のこの導出は，$\mathbb{R}$をそれ自身の上の1次元多元体として相対化する。

〈"数"の資格〉の主題に関しては，複素数に言及することは"順序構造が定義されている数の系"を相対化する――"順序構造は〈数の系〉の絶対条件ではない"――意義をもつ。

（註）複素数の導入の解釈に，"代数拡大"がある。（そしてこの場合，$\mathbb{C}$は$\mathbb{R}$の代数閉体として意義づけられる――"代数学の基本定理"。）しかし，この形での複素数の主題化は，学習者に複素数を"まったく都合的なもの"と見させてしまうおそれがある。

5.10.2 複素数の構成

はじめに，数ベクトル空間（$((\mathbb{R}^2, +), (\mathbb{R}, +, \times), {}_{\times})$）の$\mathbb{R}^2$の要素に対する回転/倍の作用を定義しよう。

先ず，集合$\boldsymbol{R}$をつぎのように定義する。即ち，$\mathbb{R}^{+}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R} \mid \boldsymbol{x}\geqq 0\}$として，$\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}$の上の同値関係～を，

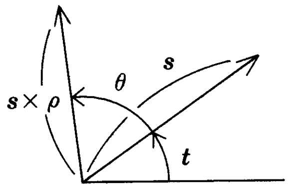
$$(\rho,\ \theta)\sim(\rho',\ \theta')$$
$$\Longleftrightarrow\ \rho=\rho'=0 \text{ か }\ \theta\equiv\theta' \pmod{2\pi}$$

で定義し，商集合（$\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}$)/～を$\boldsymbol{R}$とする。

ここで，ρを数ベクトルの長さの倍，θを数ベクトルの回転角の単位ラジアンに対する値と解釈する。このとき，数ベクトル$\in\mathbb{R}^2$に対する回転/倍の作用は，$\mathbb{R}^2$の要素（$\boldsymbol{s}\cos \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s}\sin \boldsymbol{t}$）（$\boldsymbol{s}\geqq 0$）に対する$\boldsymbol{R}$の要素$[\rho,\ \theta]$――$(\rho,\ \theta)$の属する同値類――の作用$_{\#}$として，

$$(\boldsymbol{s}\cos \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s}\sin \boldsymbol{t})_{\#}[\rho,\ \theta]$$
$$=((\boldsymbol{s}\times\rho)\cos(\boldsymbol{t}+\theta),\ (\boldsymbol{s}\times\rho)\sin(\boldsymbol{t}+\theta))$$

で定義できる。



ここで，$\boldsymbol{R}$をつぎの対応によって$\mathbb{R}^2$と同一視する：

$$[\rho,\ \theta]\longleftrightarrow(1,\ 0)_{\#}[\rho,\ \theta]$$
$$=(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\qquad(\rho>0)$$

このとき，作用$_{\#}$は，$\mathbb{R}^2$の要素（$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$）に対する$\mathbb{R}^2$の要素（$\xi,\ \eta$）の作用としては，

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi,\ \eta)$$
$$=(\boldsymbol{x}\times\xi-\boldsymbol{y}\times\eta,\ \boldsymbol{x}\times\eta+\boldsymbol{y}\times\xi)$$

となる[註1]。

いま，作用素$\in\mathbb{R}^2$の間の二つの内算法＋，×を，つぎのように定義する：

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}((\xi,\ \eta)+(\xi',\ \eta'))$$
$$=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi,\ \eta)+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi',\ \eta')$$
$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}((\xi,\ \eta)\times(\xi',\ \eta'))$$
$$=((\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi,\ \eta))_{\#}(\xi',\ \eta')$$

このとき，

$$(\xi,\ \eta)+(\xi',\ \eta')=(\xi+\xi',\ \eta+\eta')$$
$$[\rho,\ \theta]\times[\rho',\ \theta']=[\rho\times\rho',\ \theta+\theta']$$
$$(\xi,\ \eta)\times(\xi',\ \eta')=(\xi,\ \eta)_{\#}(\xi',\ \eta')$$

であり[註2]，さらに

$$((\xi,\ \eta)+(\xi',\ \eta'))\times(\xi'',\ \eta'')$$
$$=(\xi,\ \eta)\times(\xi'',\ \eta'')+(\xi',\ \eta')\times(\xi'',\ \eta'')$$

が成り立つ。

特に，〈作用素としての$\mathbb{R}^2$の要素〉の＋は，〈数ベクトルとしての$\mathbb{R}^2$の要素〉の＋と同じ。〈数ベクトルとしての$\mathbb{R}^2$の要素〉に対する〈作用素としての$\mathbb{R}^2$の要素〉の作用$_{\#}$は，〈作用素としての$\mathbb{R}^2$の要素〉の間の×と同じ。そして，＋と×は，加法と乗法の関係にある。

さらに，（$\mathbb{R}^2$，＋，×）は（0，0）を零元，（1，0）を単位元とする可換体になる。

$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ の対称元が $(-\boldsymbol{x},\ -\boldsymbol{y})$ で，$[\boldsymbol{r},\ \theta]\neq 0$ の逆元が $[\boldsymbol{r}^{-1},\ -\theta]$。

さらに，$(\mathbb{R}^2,\ +,\ \times)$ は数の系であり，これより量の系 $((\mathbb{R}^2,\ +),\ (\mathbb{R}^2,\ +,\ \times),\ \times)$ が得られる。

いま，$(\mathbb{R}^2,\ +,\ \times)$ の要素 $(\xi,\ \eta)$ に対する $(\mathbb{R},\ +,\ \times)$ の要素 ζ の作用が

$$(\xi,\ \eta)_{\times}\zeta=(\xi\times\zeta,\ \eta\times\zeta)$$

で定義される系 $((\mathbb{R}^2,\ +,\ \times),\ (\mathbb{R},\ +,\ \times),\ {}_{\times})$ において，

$$1=(1,\ 0),\ \boldsymbol{i}=(0,\ 1)$$

とおく。このとき，

$$(\xi,\ \eta)=1_{\times}\xi+\boldsymbol{i}_{\times}\eta$$

特に，$(\mathbb{R}^2,\ +,\ \times)$ は実数体 $(\mathbb{R},\ +,\ \times)$ の上の二元体。この意味で，数の系 $(\mathbb{R}^2,\ +,\ \times)$ を二元数（“複素数”）と呼ぶ。

（註１）$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{s}\cos\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s}\sin\boldsymbol{t})$，$(\xi,\ \eta)=[\rho,\ \theta]$ とすると，

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi,\ \eta)\\
&=(\boldsymbol{s}\cos\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s}\sin\boldsymbol{t})_{\#}[\rho,\ \theta]\\
&=(\boldsymbol{s}\rho\cos(\boldsymbol{t}+\theta),\ \boldsymbol{s}\rho\sin(\boldsymbol{t}+\theta))\\
&=(\boldsymbol{s}\rho(\cos\boldsymbol{t}\cos\theta-\sin\boldsymbol{t}\sin\theta),\\
&\qquad \boldsymbol{s}\rho(\sin\boldsymbol{t}\cos\theta+\cos\boldsymbol{t}\sin\theta))\\
&=((\boldsymbol{s}\cos\boldsymbol{t})(\rho\cos\theta)-(\boldsymbol{s}\sin\boldsymbol{t})(\rho\sin\theta),\\
&\qquad (\boldsymbol{s}\sin\boldsymbol{t})(\rho\cos\theta)+(\boldsymbol{s}\cos\boldsymbol{t})(\rho\sin\theta))\\
&=(\boldsymbol{x}\times\xi-\boldsymbol{y}\times\eta,\ \boldsymbol{y}\times\xi+\boldsymbol{x}\times\eta)
\end{aligned}$$

（註２）(1)　$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi,\ \eta)+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi',\ \eta')$

$$\begin{aligned}
&=(\boldsymbol{x}\times\xi-\boldsymbol{y}\times\eta,\ \boldsymbol{x}\times\eta+\boldsymbol{y}\times\xi)\\
&\qquad +(\boldsymbol{x}\times\xi'-\boldsymbol{y}\times\eta',\ \boldsymbol{x}\times\eta'+\boldsymbol{y}\times\xi')\\
&=((\boldsymbol{x}\times\xi-\boldsymbol{y}\times\eta)+(\boldsymbol{x}\times\xi'-\boldsymbol{y}\times\eta'),\\
&\qquad (\boldsymbol{x}\times\eta+\boldsymbol{y}\times\xi)+(\boldsymbol{x}\times\eta'+\boldsymbol{y}\times\xi'))\\
&=(\boldsymbol{x}\times(\xi+\xi')-\boldsymbol{y}\times(\eta+\eta'),\\
&\qquad (\boldsymbol{x}\times(\eta+\eta')-\boldsymbol{y}\times(\xi+\xi'))\\
&=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})_{\#}(\xi+\xi',\ \eta+\eta')
\end{aligned}$$

(2)　$((\boldsymbol{s}\cos\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s}\sin\boldsymbol{t})_{\#}[\rho,\ \theta])_{\#}[\rho',\ \theta']$

$$\begin{aligned}
&=(\boldsymbol{s}\rho\cos(\boldsymbol{t}+\theta),\ \boldsymbol{s}\rho\sin(\boldsymbol{t}+\theta))_{\#}[\rho',\ \theta']\\
&=(\boldsymbol{s}\rho\rho'\cos(\boldsymbol{t}+\theta+\theta'),\\
&\qquad \boldsymbol{s}\rho\rho'\sin(\boldsymbol{t}+\theta+\theta'))\\
&=(\boldsymbol{s}\cos\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s}\sin\boldsymbol{t})_{\#}[\rho\times\rho',\ \theta+\theta']
\end{aligned}$$

(3)　$[\rho,\ \theta]\times[\rho',\ \theta']$

$$\begin{aligned}
&=[\rho\times\rho',\ \theta+\theta']\\
&=(\rho\rho'\cos(\theta+\theta'),\ \rho\rho'\sin(\theta+\theta'))\\
&=(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)_{\#}[\rho',\ \theta']\\
&=[\rho,\ \theta]_{\#}[\rho',\ \theta']
\end{aligned}$$

5.10.3　複素数の系の中への実数の系の埋め込み

実数 ξ を複素数 $(\xi,\ 0)=1_{\times}\xi$ に写す写像：$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ は，複素数の系の中への実数の系の埋め込みになる。

5.11　四元数

体 $\mathbb{R}$ 上の４次元の多元体（四元体）として，四元数の系 $\mathbb{H}$ が得られる。

体 $\mathbb{R}$ 上の２次元の多元体（二元体）である複素数の系は，四元数の系に埋め込まれる。また，体 $\mathbb{R}$ 上の有限次の多元体は，$\mathbb{R}$ 自身，$\mathbb{C}$ そして $\mathbb{H}$ に限られる。

四元数への言及は，複素数を“２次元の多元体”という形で相対化する意義をもつ。また，〈“数”の資格〉の主題に関しては，“乗法が可換な数の系”を相対化する――“乗法の可換性は〈数の系〉の絶対条件ではない”――意義をもつ。

5.12　“数の拡張”の図式

“数の拡張”を図式にまとめると，以下のようになる――但し，記号“差”，“比”，“連”，“次”は，それぞれ，差の系の導出，比の系の導出，連続化，次元の拡張を表わす。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B} \arrow[r, "連"] \arrow[dr, "差"] & \mathbb{R}^{+} \arrow[dr, "差"] & & \mathbb{C} \arrow[dr, "\subset"] & \\
\mathbb{N} \arrow[ur, "比"] \arrow[dr, "差"'] & & \mathbb{Q} \arrow[r, "連"] & \mathbb{R} \arrow[ur, "次"] \arrow[rr, "次"'] & & \mathbb{H} \\
 & \mathbb{Z} \arrow[ur, "比"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

6　量形式

数形式の意義は，ある一つの形式にそれの部分形式として数形式を組み込む形で表わすことができる。数形式を部分として含むこの形式は，量形式ないし位形式である。(量形式は位形式の部分形式である。)

実際，数の意義は量の作用素/係数（スカラ）であり，数の使用の相は “量/位” である。そしてここで示す量形式/位形式は，量/位（＝数の使用）の “普遍対象” として理解可能なものである。

なお本稿では，ここで行なう “数/量” に関する諸規定が妥当なものであるかどうか——“数/量” に関する周知の性質を過不足なく含意するものになっているかどうか——の検証の都合のために，命題の自明な証明も敢えて記載していくことにする。

6.1　量形式，量の系

6.1.1　“量の系” であることの要件

“数の構成” の主題のもとで実現された数の系は，無意味である。これの第一階の意味づけは，“作用素の系” として，一つの系の中に埋め込むことである。数の系の意味づけとなるこのような系を，差し当たり “量の系” と読んでおく。

“量” の定義に対するここでの立場は，《“数の系” に対応する最も一般的な系として “量の系” を定める》である。——日常的に考えられている “量” は，われわれがここで定義しようとする “量” より多くの内容をもつことになる。

実際，われわれは “量” を，“数の系” に対応する最も一般的な系として，つぎのような系 Q のことであると定めよう：

(A)　数の系が〈係数の系〉として Q において機能し，

かつこのことによって

(B)　数の系が Q の所期の要素を求める計算の手段になる．

この “量” の概念は，日常的な “量” の概念の著しい一般化である。例えば，

《2次元の座標平面（“ガウス平面”）に対する複素数の作用を主題することは，一つの量の系を主題化することに他ならない》

といった具合になる。それでもわれわれとしては，複素数が〈係数の系〉としてその上で機能するような系をも “量” と呼ぶことを選ぶとしよう。

6.1.2　量形式の定義，量の系

“量の系” の定義——“量” の要件(A)，(B)を満たすような定義——は，可換半群（$\boldsymbol{Q}$，$+$）(注1) と数の系（$\boldsymbol{N}$，$+$，$\times$）が外算法（数の倍作用）$_\times$ でつながっている系

$$((\boldsymbol{Q},\ +),\ (\boldsymbol{N},\ +,\ \times),\ {}_\times)$$

の定義になる。そしてそれは，つぎの二通りに考えられる：

(1)　$\boldsymbol{Q}$ の要素で測定単位になるものが存在する．そして，$_\times$ がつねに定義される．

(2)　$\boldsymbol{Q}$ の任意の要素——零元 0 が存在するときは，0 と異なる任意の要素——が，測定単位になる．そのかわり，$_\times$ がつねに定義されるとは限らない。

ここで，$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{Q}$ が測定単位になるとは，任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{Q}$ に対し $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}\,{}_\times\,\xi$ となる $\xi\in\boldsymbol{N}$ が一意的に存在することである。(特に，$\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{u}$ で生成される。)——われわれは，“測定可能性” を量の根本規定と考える。

(1)は，$((\boldsymbol{Q},\ +),\ (\boldsymbol{N},\ +,\ \times),\ {}_\times)$ が，$\boldsymbol{N}\in\{\mathbb{N},\ \mathbb{B},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}^+,\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}\}$ に対する

$$((\boldsymbol{N},\ +),\ (\boldsymbol{N},\ +,\ \times),\ \times)$$

と同型な場合である。このとき，$1\in\boldsymbol{N}$ に対応する要素 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{Q}$ が測定単位になる。

(2)は，$\boldsymbol{N}\in\{\mathbb{B},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}^+,\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}\}$ と $\boldsymbol{N}$ の下位の数の系 $\boldsymbol{M}$ に対する

$$((\boldsymbol{M},\ +),\ (\boldsymbol{N},\ +,\ \times),\ \times)$$

と同型な場合である。

われわれとしては，“量の系” を(1)によって定義するとしよう。即ち，数の系（$\boldsymbol{N}$，$+$，$\times$）に対し，系

$$((N, +), (N, +, \times), \times)$$

と同型な系 $((Q, +), (N, +, \times), {}_\times)$ (註2) を，量の系と定める。

量の系 $((Q, +), (N, +, \times), {}_\times)$ の含意として，つぎのことが成り立つ (註3)：

(1)　+は結合的かつ可換

(2)　$(x {}_\times \xi) {}_\times \eta = x {}_\times (\xi \times \eta)$

(3)　$x {}_\times 1 = x$

(4)　Qが零元0をもつとき，$0 {}_\times \xi = 0$

(5)　$x {}_\times (\xi + \eta) = x {}_\times \xi + x {}_\times \eta$

$(x+y) {}_\times \xi = x {}_\times \xi + y {}_\times \xi$

(6)　$x+y=x+z \Longrightarrow y=z$

(7)　$x {}_\times \xi = x {}_\times \eta$ かつ $x \in Q^*$

$\Longrightarrow \xi = \eta$

(8)　つぎの条件を満たすQの要素uが存在する：

任意の$x \in Q$に対し，$x = u {}_\times \xi$ となる $\xi \in N$が一意的に存在する．

ここでQ^*は，Qが零元0をもつときは$Q \setminus \{0\}$で，そうでないときはQ自身。

なお，$N \in \{\mathbb{B}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$に対する$((N, +), (N, +, \times), \times)$と同型な$((Q, +), (N, +, \times), {}_\times)$では，

(3)　Qの任意の要素──零元0が存在するときは，0と異なる任意の要素──が，測定単位になり，かつ，${}_\times$がつねに定義される．

となる。

$x, y \in Q$，$\xi \in N$に対し，関係$x = y {}_\times \xi$は，“xはyのξ倍”と読まれる。また，ξは“xのyに対する比”とも読まれ，$x : y$と記される（ただし，Qに0が存在するときは$y \neq 0$の場合)。

（註1）$(Q, +)$の+を，文脈から数の系$(N, +, \times)$の+と区別すること。表記の簡便のために新しい記号を導入することはしない。

（註2）この場合の同型対応$f : Q \longrightarrow N$の条件は，

(1)　1対1対応

(2)　$f(x+y) = f(x) + f(y)$

(3)　$f(x {}_\times \xi) = f(x) \times \xi$

（註3）同型対応$f : Q \longrightarrow N$に対し，

(1)　$(x+y)+z = f^{-1}(f((x+y)+z)) = f^{-1}((f(x)+f(y))+f(z)) = f^{-1}(f(x)+(f(y)+f(z))) = f^{-1}(f(x+(y+z))) = x+(y+z)$。同様に，+は可換。

(2)　$x {}_\times (\xi \times \eta) = f^{-1}(f(x {}_\times (\xi \times \eta))) = f^{-1}(f(x) \times (\xi \times \eta)) = f^{-1}((f(x) \times \xi) \times \eta) = f^{-1}(f(x {}_\times \xi) \times \eta) = f^{-1}(f((x {}_\times \xi) {}_\times \eta)) = (x {}_\times \xi) {}_\times \eta$。

(3)　$x {}_\times 1 = f^{-1}(f(x {}_\times 1)) = f^{-1}(f(x) \times 1) = f^{-1}(f(x)) = x$。

(4)　$0 {}_\times \xi = f^{-1}(f(0 {}_\times \xi)) = f^{-1}(f(0) \times \xi) = f^{-1}(0 \times \xi) = f^{-1}(0) = 0$。

(5)　$x {}_\times (\xi + \eta) = f^{-1}(f(x {}_\times (\xi + \eta))) = f^{-1}(f(x) \times (\xi + \eta)) = f^{-1}(f(x) \times \xi + f(x) \times \eta) = f^{-1}(f(x {}_\times \xi) + f(x {}_\times \eta)) = f^{-1}(f(x {}_\times \xi + x {}_\times \eta)) = x {}_\times \xi + x {}_\times \eta$。同様に，$(x+y) {}_\times \xi = x {}_\times \xi + y {}_\times \xi$

(6)　$x+y=x+z \Longrightarrow f(x+y)=f(x+z)$

$\Longrightarrow f(x)+f(y)=f(x)+f(z)$

$\Longrightarrow f(y)=f(z) \Longrightarrow y=z$。

(7)　$x \in Q^*$に対し，$f(x) \in N^*$。そしてこのとき，$x {}_\times \xi = x {}_\times \eta \Longrightarrow f(x {}_\times \xi) = f(x {}_\times \eta) \Longrightarrow f(x) \times \xi = f(x) \times \eta \Longrightarrow \xi = \eta$。

(8)　$u = f^{-1}(1)$とする。任意の$x \in Q$に対し$\xi = f(x)$とすると，$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1 \times \xi) = f^{-1}(f(u) \times \xi) = f^{-1}(f(u {}_\times \xi)) = u {}_\times \xi$。$1 \in N^*$より$u \in Q^*$。よって，(7)より$x = u {}_\times \xi$となる$\xi \in N$は一意。

6.1.3　計算の可能性

“量の系”の定義は，つぎの相等関係を含意している：

$$x {}_\times \xi + x {}_\times \eta = x {}_\times (\xi + \eta)$$
$$x {}_\times \xi + y {}_\times \xi = (x+y) {}_\times \xi$$
$$(x {}_\times \xi) {}_\times \eta = x {}_\times (\xi \times \eta)$$

われわれが《数計算によって所期の量を求める》とき，この相等関係が根拠になっている。

実際，量の系 $((Q, +), (N, +, \times), {}_\times)$

の上の計算は，つぎのようになる。即ち，$\boldsymbol{Q}$の一つの要素$\boldsymbol{u}$が“単位”として固定されており，計算とはつぎの二つの組み合わせになるもの：

(i) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Q}$に対し，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}_\times\xi$となる$\xi\in N$（“$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$の値”）を求める．

(ii) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{Q}$と$\xi\in N$に対し，$\boldsymbol{x}_\times\xi=\boldsymbol{u}_\times\eta$となる$\eta\in N$（“$\boldsymbol{x}_\times\xi$の値”）を求める．

そして数の系（N, +, ×）は，先の相等関係により，計算の手段になる。

6.2 量としての数

6.2.1 量としての数——数の系からの量の系の導出

“数の系（N, +, ×）に応ずる量の系”の定義に用いた系（(N, +), (N, +, ×), ×）はそれ自身量の系となるが，これを“量としての数”と呼ぶことにする(註)。

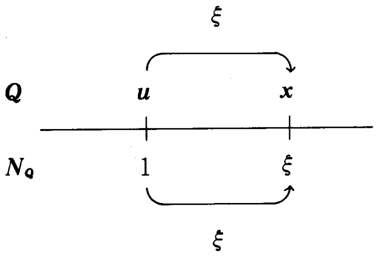
(註) “量としての数”の発想は，体（N, +, ×）からベクトル空間（(N, +), (N, +, ×), ×）を導出する発想——周知の発想——に準ずる。

6.2.2 “1と見る”

量の系（($\boldsymbol{Q}$, +), (N, +, ×), ${}_\times$）の単位$\boldsymbol{u}$から導かれる同型

$$(\tilde{\boldsymbol{u}}, id):((\boldsymbol{Q},+),(N_1,+,\times),{}_\times) \longrightarrow ((N_Q,+),(N_2,+,\times),{}_\times) \quad (N_1=N_2=N_Q=N)$$

において，$\boldsymbol{Q}$の要素$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_\times\xi$（$\xi\in N_1$）は$1_\times\xi=\xi$（左辺の$\xi$は$N_2$の要素，右辺の$\xi$は$N_Q$の要素）と対応する。これが，“$\boldsymbol{u}$を1と見たとき，$\boldsymbol{x}$は$\xi$”の言い回しの意味である。



6.3 比，比の値

（N, +, ×）を，×が可換な数の系とする。

（N, +, ×）からの（N_R, +, ×）の導出の過程（§4.1）で，Nの要素に関する比の概念を導入した。

いま，((N, +), (N, +, ×), ${}_\times$）と同型な量の系（($\boldsymbol{Q}$, +), (N, +, ×), ${}_\times$）に対しても，《両者の間の同型対応によって，Nにおける比を$\boldsymbol{Q}$に写す》という形で，比を構成する。——具体的には，$\boldsymbol{Q}$の単位$\boldsymbol{u}$に対し，

$$\boldsymbol{u}_\times\xi_1:\boldsymbol{u}_\times\eta_1=\boldsymbol{u}_\times\xi_2:\boldsymbol{u}_\times\eta_2 \iff \xi_1:\eta_1=\xi_2:\eta_2$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Q}$に対し，つぎの条件は同値(註)：

(1) $\boldsymbol{x}_\times\eta=\boldsymbol{y}_\times\xi$

(2) ある$\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{Q}$に対し，
$$\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}=\boldsymbol{w}_\times\xi:\boldsymbol{w}_\times\eta$$

この条件が満たされるとき，“$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の比は$\xi:\eta$”とか，“$\boldsymbol{x}$に対する$\boldsymbol{y}$の比の値はη/ξ”，“$\boldsymbol{x}$をもとにした$\boldsymbol{y}$の値はη/ξ”などと言い表わす。

(註) (1)⟹(2)：$\boldsymbol{x}_\times\eta=\boldsymbol{y}_\times\xi$で，$\boldsymbol{Q}$の単位$\boldsymbol{u}$に対し$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_\times\alpha$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}_\times\beta$であるとする。このとき，$\boldsymbol{u}_\times\alpha_\times\eta=\boldsymbol{u}_\times\beta_\times\xi$であるが，これを$\boldsymbol{w}$とすると，$\boldsymbol{w}_\times\xi:\boldsymbol{w}_\times\eta=\boldsymbol{u}_\times\alpha_\times\eta_\times\xi:\boldsymbol{u}_\times\beta_\times\xi_\times\eta=\boldsymbol{u}_\times\alpha:\boldsymbol{u}_\times\beta=\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}$。

(2)⟹(1)：　$\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}=\boldsymbol{w}_\times\xi:\boldsymbol{w}_\times\eta$であるとき，$\boldsymbol{Q}$の単位$\boldsymbol{u}$に対し$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_\times\alpha$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}_\times\beta$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}_\times\gamma$とすると，$\boldsymbol{u}_\times\alpha:\boldsymbol{u}_\times\beta=\boldsymbol{u}_\times(\gamma\times\xi):\boldsymbol{u}_\times(\gamma\times\eta)$。このとき，$\alpha:\beta=(\gamma\times\xi):(\gamma\times\eta)=\xi:\eta$。よって，$\boldsymbol{x}_\times\eta=\boldsymbol{u}_\times(\alpha\times\eta)=\boldsymbol{u}_\times(\beta\times\xi)=\boldsymbol{y}_\times\xi$。

6.4 順序構造を伴う量の系

6.4.1 順序構造を伴う量の系

順序構造を伴う数の系（N, +, ×, ≦）に対する系（(N, +, ≦), (N, +, ×, ≦), ×）を，順序構造を伴う量形式と呼び，これと同型な系（($\boldsymbol{Q}$, +, ≦), (N, +, ×, ≦), ${}_\times$）を，順序構造を伴う量の系と呼ぶ。

6.4.2 位相構造

順序構造を伴う量の系（$((Q, +), (N, +, \times), {}_{\times})$（特に，順序構造を伴う量形式）に対しては，それの位相として順序位相を標準的に考える。このとき，順序構造を伴う量の系の同型は位相同型になる。

特に，写像：

$$Q \times Q \longrightarrow Q\ ;\ (x, y) \longmapsto x+y$$

$$Q \times N \longrightarrow Q\ ;\ (x, \xi) \longmapsto x {}_{\times} \xi$$

が連続。

したがってまた，順序構造を伴う量の系が線型空間ならば，それは順序位相線型空間である。

6.5 位形式，位の系

6.5.1 位の系

われわれはさらに，“量形式”，“量の系”の上位概念として“位(くらい)形式”，“位の系”の概念を導入することにしよう。

先ず，数の系（$N, +, \times$）に対し，これの差の系（$N_D, +, \times$）を導入する。NはN_Dの部分になる——Nの$+$が群算法であればNとN_Dは一致する。

つぎに，$N_O = N \cup \{0\}$とおいて，系：

$(N_O, ((N_D, +), (N_D, +, \times), \times), +)$

を位形式と定め，これと同型な系（$S, ((Q, +), (N_D, +, \times), {}_{\times}), {}_{+}$）を位の系と呼ぶ。——ここで，

(1) Sの要素の身分は“位”；

(2) Qの要素の身分は“変位”；

(3) 最後の項の${}_{+}$の身分は，“位に対する変位の作用”(註1)

のように読む。実際，$X, Y \in S$に対し$X {}_{+} x = Y$となる$x \in Q$（これは一意的に存在する）を，Xに対するYの変位と呼び，$\overrightarrow{XY}$で表わす。

つぎのことが成り立つ(註2)：

(1) Qには零元0が存在し，かつ$X \in S$に対し

$$X {}_{+} 0 = X$$

(2) $X \in S$と$x, y \in Q$に対し，

$$(X {}_{+} x) {}_{+} y = X {}_{+} (x+y)$$

(3) $X \in S$と$x, y \in Q$に対し，

$$X {}_{+} x = X {}_{+} y \Longrightarrow x = y$$

Sには基準Oが存在する——即ち，Sの要素Oでつぎの条件を満たすものが存在する(註3)：

各$X \in S$に対し，$X = O {}_{+} x$となる$x \in Q$が（一意的に）存在する.

（註1）$N \neq N_D$であれば，作用${}_{+}$はつねには定義されない。

（註2）（$S, ((Q, +), (N_D, +, \times), {}_{\times}), {}_{+}$）は（$N_O, ((N_D, +), (N_D, +, \times), \times), +$）と同型。一方，(1) N_Dには零元0が存在し，かつ$X \in N_O$に対し，$X + 0 = X$；(2) $X \in N_O$と$x, y \in N_D$に対し，$(X+x)+y = X+(x+y)$；(3) $X \in N_O$と$x, y \in N_D$に対し，$X+x = X+y \Longrightarrow x = y$。

（註3）（$N_O, ((N_D, +), (N_D, +, \times), \times), +$）と（$S, ((Q, +), (N_D, +, \times), {}_{\times}), {}_{+}$）の同型において，$0 \in N_O$に対応する$S$の要素が所期の$O$。

6.5.2 “位としての数”

数の系（$N, +, \times$）に対応する位形式（$N_O, ((N_D, +), (N_D, +, \times), \times), +$）は，それ自身，位の系である。この位の系を，“位としての数”と言い表わす。

6.5.3 量の系からの，位の系の導出

量の系（$(Q, +), (N, +, \times), {}_{\times}$）からは，位の系（$Q_O, ((Q_D, +), (N_D, +, \times), {}_{\times}), +$）が導かれる(註1)。

即ち，（$(N, +), (N, +, \times), \times$）と（$(Q, +), (N, +, \times), {}_{\times}$）の同型を用いて，（$(N, +), (N, +, \times), \times$）からの（$N_O, ((N_D, +), (N_D, +, \times), \times), +$）の構成法を（$(Q, +), (N, +, \times), {}_{\times}$）に適用する(註2)。

例えば，“高度”は，長さ(距離)の系（$(Q, +), (\mathbb{B}, +, \times), {}_{\times}$）から導かれる位の系（$Q_O, ((Q_D, +), (\mathbb{Q}, +, \times), {}_{\times}), +$）として解釈可能である。——$Q_O$の要素を“高さ”と読み，$Q_D$の要素を“(方向付き)高度差”（“高さの増減”）と読む。

（註1）この発想は，ベクトル空間 $((\boldsymbol{Q},+),(\boldsymbol{N},+,\times),{}_{\times})$ からアフィン空間 $(\boldsymbol{Q},((\boldsymbol{Q},+),(\boldsymbol{N},+,\times),{}_{\times}),+)$ を導出する発想――周知の発想――に準ずる。

（註2）先ず，同型対応 $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{id}_{\boldsymbol{N}}):((\boldsymbol{N},+),(\boldsymbol{N},+,\times),\times)\longmapsto((\boldsymbol{Q},+),(\boldsymbol{N},+,\times),{}_{\times})$ を使って，$(\boldsymbol{N},+)$ からの $(\boldsymbol{N_D},+)$ の構成（§4.7）に $(\boldsymbol{Q},+)$ からの $(\boldsymbol{Q_D},+)$ の構成を対応させる。

この構成の結果としての同型 $\tilde{\boldsymbol{f}}:(\boldsymbol{N_D},+)\longrightarrow(\boldsymbol{Q_D},+)$ に対し，$(\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{id}):((\boldsymbol{N_D},+),(\boldsymbol{N_D},+,\times),\times)\longrightarrow((\boldsymbol{Q_D},+),(\boldsymbol{N_D},+,\times),{}_{\times})$ は量の系の構造に関する同型。そして，量の系 $((\boldsymbol{Q_D},+),(\boldsymbol{N_D},+,\times),{}_{\times})$ から導かれる系 $(\boldsymbol{Q_O},((\boldsymbol{Q_D},+),(\boldsymbol{N_D},+,\times),{}_{\times}),+)$ が求めるものである。

6.6 順序構造を伴う位の系

6.6.1 順序構造を伴う位の系

順序構造を伴う数の系 $(\boldsymbol{N},+,\times,\leqq)$ に対し，系 $((\boldsymbol{N_O},\leqq),((\boldsymbol{N_D},+,\leqq),(\boldsymbol{N_D},+,\times,\leqq),\times),+)$ を，順序構造を伴う位形式と呼び，これと同型な系 $((\boldsymbol{S},\leqq),((\boldsymbol{Q},+,\leqq),(\boldsymbol{N_D},+,\times,\leqq),{}_{\times}),{}_{+})$ を，順序構造を伴う位の系と呼ぶ。

この場合，

$$X{}_{+}x<X{}_{+}y\Longrightarrow x<y$$

が成り立つ。また，

$$X<X{}_{+}x\Longrightarrow x>0$$

6.6.2 順序構造を伴う量の系からの導出

順序構造を伴う量の系 $((\boldsymbol{Q},+,\leqq),(\boldsymbol{N},+,\times,\leqq),{}_{\times})$ からは順序構造を伴う位の系 $((\boldsymbol{Q_O},\leqq),((\boldsymbol{Q_D},+,\leqq),(\boldsymbol{N_D},+,\times,\leqq),{}_{\times}),+)$ が導かれる。

6.6.3 位相構造

順序構造を伴う位の系 $((\boldsymbol{S},\leqq),((\boldsymbol{Q},+,\leqq),(\boldsymbol{N},+,\times,\leqq),{}_{\times}),{}_{+})$（特に，順序構造を伴う位形式）に対しては，それの位相として順序位相を標準的に考える。このとき，順序構造を伴う位の系の同型は位相同型になる。

特に，$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{Q}$ から $\boldsymbol{S}$ への写像：

$$(X,x)\longmapsto X{}_{+}x$$

が連続。

したがってまた，順序構造を伴う位の系がアフィン空間ならば，それは順序位相アフィン空間である。

6.7 量の系に準ずる系

6.7.1 倍作用 ${}_{\times}$ がつねに定義されるとは限らない系

量の系 $((\boldsymbol{Q},+),(\boldsymbol{N},+,\times),{}_{\times})$, $((\boldsymbol{Q}',+),(\boldsymbol{N}',+,\times),{}_{\times})$ で，$(\boldsymbol{Q},+)$ と $(\boldsymbol{N},+,\times)$ がそれぞれ $(\boldsymbol{Q}',+)$ と $(\boldsymbol{N}',+,\times)$ の部分であるようなものからは，系 $((\boldsymbol{Q},+),(\boldsymbol{N}',+,\times),{}_{\times})$ と $((\boldsymbol{Q}',+),(\boldsymbol{N},+,\times),{}_{\times})$ が導かれる。このときには，《${}_{\times}$ がつねに定義されるとは限らない》という具合に事情が変わる。

例えば，量の系 $((\boldsymbol{Q}_1,+),(\mathbb{N},+,\times),{}_{\times})$ と $((\boldsymbol{Q}_2,+),(\mathbb{Q},+,\times),{}_{\times})$ から二つの系 $((\boldsymbol{Q}_1,+),(\mathbb{Q},+,\times),{}_{\times})$, $((\boldsymbol{Q}_2,+),(\mathbb{N},+,\times),{}_{\times})$ が導かれる。前者は“離散量における整数比の概念の導入”，後者は“単位を導入することによる，自己稠密量の離散量化”と，それぞれ読める。

6.7.2 系 $((\boldsymbol{Q},\leqq),(\boldsymbol{N},\leqq),\boldsymbol{f})$ ――順序構造が専ら考えられている系

生活において“量”と呼ばれるものには，“度数”のように，《順序構造だけが考えられていて，この構造の表現のために数が使われている》ようなものがある。

これは，

(1) 順序集合 $(\boldsymbol{Q},\leqq)$

(2) 数の系 $(\boldsymbol{N},+,\times,\leqq)$ から導出される順序集合 $(\boldsymbol{N},\leqq)$

(3) $(\boldsymbol{Q},\leqq)$ の $(\boldsymbol{N},\leqq)$ の中への準同型 $\boldsymbol{f}$

でなる系 $((\boldsymbol{Q},\leqq),(\boldsymbol{N},\leqq),\boldsymbol{f})$ というように定式化できる。――このとき，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{Q}$ に対す

る$f(x)$ が“xの度数”である。

われわれの“量”の主題からは，この系は外れる。

6.7.3　行列を作用素とする系

数の系（N，＋，×）に対し，Nの要素がつくるn次正方行列全体の集合を$M(N, n)$で表わす。$M(N, n)$においては，加法＋と乗法×が周知のように定義される。

N^nの内算法（加法）＋を

$$(\xi_i)+(\eta_i)=(\xi_i+\eta_i)$$

で定義し，N^nの要素（ξ_1，‥‥，ξ_n）に対する$M(N, n)$の要素（α_{ij}）の作用$_\times$を

$$(\xi_1, \cdots, \xi_n)_\times(\alpha_{ij})$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k\times\alpha_{k1}), \cdots, \sum_{k=1}^{n}(\xi_k\times\alpha_{kn})\right)$$

で定義する。

系（$M(N, n)$，＋，×）は一般に“数の系”にはならないので，系$\mathscr{M}$：

$$((N^n, +), (M(N, n), +, \times), {}_\times)$$

は一般に量の系ではない。しかし$\mathscr{M}$は，次元に関して，量の系のモデルであるところの

$$((N, +), (N, +, \times), \times)$$
$$=((N^1, +), (M(N, 1), +, \times), {}_\times)$$

の一般化になっている。この意味で，$\mathscr{M}$と同型な系は量の系に準ずる系であると言える。

6.7.4　数空間

数の系（N，＋，×）に対し，N^nの要素（ξ_1，‥‥，ξ_n）に対するNの要素αの作用$_\times$を

$$(\xi_1, \cdots, \xi_n)_\times\alpha=(\xi_1\times\alpha, \cdots, \xi_n\times\alpha)$$

で定義するときの系

$$((N^n, +), (N, +, \times), {}_\times)$$

を，“(数の系（N，＋，×）に応ずる)数空間”と呼ぶことにする。

数空間は一般に量の系ではない。しかしそれは，次元に関して，量の系のモデルであるところの

$$((N, +), (N, +, \times), \times)$$
$$=((N^1, +), (N, +, \times), {}_\times)$$

の一般化になっている。この意味で，数空間と同型な系は量の系に準ずる系であると言える。

数の系（N，＋，×）が体であるとき，数空間（(N^n，＋)，(N，＋，×)，$_\times$）は線型空間である。そこでこれに準じて，一般に数空間と同型な系に対しても“基底”の概念を導入する。

6.8　量(形式)の現定式化の妥当性

量形式を数形式（N，＋，×）に対する（(N，＋)，(N，＋，×)，×）と規定し，位の系の形式を（N，((N，＋)，(N，＋，×)，×)，＋）と規定するのは，《生活実践の中の量や位の諸カテゴリーがこの定式化で以って十分捉えられる》という認識――現時点での認識――による。これはもちろん論点である。量/位形式の定式化の課題はつねに開いている。

7　“量”成立の言語ゲーム

量は形式として存在する――しかも人の読み，ないし人の生活の上に示されるもの，として存在する。

本章では，このようなものとしての“量”の成立を，理論的に（あくまでも理論的に）シミュレートしてみる。シミュレートされるのは，“量”成立の言語ゲームである。

7.1　“量”成立の言語ゲーム

“量”の実体を問うていくとき，どのような対象概念もそうであるように，ついには人の或る一定の振舞い――“行儀”――しか残らなくなる。即ち，“量”とは人の行儀に示されているところのものである，と言う他ない。

この意味の“行儀”は，ウィトゲンシュタインが“言語ゲーム”ということばで言い表わしてきたものである。そこで，本論でもこの言い回しを用いることにする。

本章の主題は，この〈“量”成立の言語ゲーム〉を特定しつつ，〈“量”の成立〉を〈読みを素材にして始まる理論構築〉として表現してみることである。

ここで示そうとする〈“量”の成立〉は，“量”の成立史(註)ではない。〈“量”の成立〉のシナリオである。これをつくることで，われ

われは，“量”が如何に多くの約束事の上に成立しているものであるかを，認識することができる。

（註）これが語り得るものであるとすれば，それは，人の或る範疇の言語ゲーム——われわれが後追い的に《“量”がそこに示されている》と読めるところの言語ゲーム——の歴史として語られるものである。

7.2 “てんびん”

われわれは，“量”の構成を，“てんびん（天秤）”の論理から始める。

もっとも，“てんびん”は初めから論理的な存在である。それは，モノ（事態）の概念から量(大きさ)の概念を導出するための概念装置である。

論理としての“てんびん”の本質は，モノの“釣り合い/不釣り合い”——“量（大きさ）の相等/非相等”と読まれるところの——の概念を生むことである。

そして，量(大きさ)が“てんびん”の上に生起する事態に対して読まれる。そこに存るのは，二つのモノをてんびんの両皿にのせたときにてんびんが傾いたり，平衡であったりという現象だけであるが，この現象に対する読みとして“量(大きさ)”という対象が起こる。決して“てんびん以前に存在している量(大きさ)がてんびんの上に現象する”というのではない。

なお，ここで謂う“てんびん”は，あくまでも比喩である(註)。皿に物をのせて重さの相等/非相等を見るあのてんびんのことではない。あくまでも，モノの“釣り合い/不釣り合い”——“量(大きさ)の相等/非相等”と読まれるところの——の概念を生む装置一般のことである。例えば，バネにモノをつるしたときのバネの伸びで“釣り合い/不釣り合い”が判定されるとき，このバネ装置はここで謂う“てんびん”である。

（註）“モノをてんびんの両皿にのせたときにてんびんが傾いたり，平衡であったり”という言い回しは，比喩である。

7.3 対象の同一視

“てんびん”の上のわれわれの実践においては，先ず，《対象（モノ/事態）の同一視》の一形式が示されている。この形式を“明確に”述べることはできないが，それは，モノの変位や変形をモノの変化ということにはしないとか，モノは時間の経過の中では変化しないとする，といったようなことである。

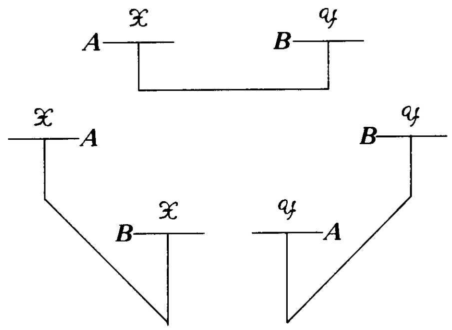
但しその場合でも，モノに対する“同じ/異なる”の判断は都合的なものであるとする他ない。実際，物の或る変形に対し変形の前と後とをモノとして区別しておきたいという都合もあるのである。

本章では，モノが異なるということを，表示の文字が異なるということで，表わすことにする。

7.4 対象の同値，量(大きさ)

さて，“てんびんの上の実践”において示されるところの論理であるが，最初に挙げるのはつぎのものである：

てんびんの二つの皿$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$とモノ$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$に対し，つぎの三つの状態のうちの一つ，しかもただ一つのみが現出する：



このうちの最初の状態を，$\mathcal{X}\sim\mathcal{Y}$で表わし，“対象の同値”と読む。さらに，“同値”を“量(大きさ)が同じ”と読み換える形で，“量(大きさ)”を対象化する。

即ち，

$$\mathscr{X}\sim\mathscr{Y} \Longrightarrow \mathscr{Y}\sim\mathscr{X}$$ (註1)，

$$\mathscr{X}\sim\mathscr{Y}\text{かつ}\mathscr{Y}\sim\mathscr{Z} \Longrightarrow \mathscr{X}\sim\mathscr{Z}.$$

をてんびんの論理と定めることで，関係～を“〈てんびんの皿にのる対象〉の間の同値関係”と想念し，さらにこの同値関係による全対象の類別を想念する。そして，各類に固有の内包として“量(大きさ)”を想念する(註2)。

対象$\mathscr{X}$の量(大きさ)を［$\mathscr{X}$］で表わす。そこで，［$\mathscr{X}$］＝［$\mathscr{Y}$］が$\mathscr{X}\sim\mathscr{Y}$の表現になる。

(註1) 即ち，関係～に関して，皿$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$の区別は本質的ではないということ。

(註2) モノ$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$に対する関係$\mathscr{X}\sim\mathscr{Y}$(“$\mathscr{X}$と$\mathscr{Y}$がてんびんでつりあう”)に対し，$\mathscr{X}$の〈何か〉と$\mathscr{Y}$の〈何か〉が同じという形の発想をし，関係$\mathscr{X}<\mathscr{Y}$(“$\mathscr{X}$をのせた皿よりも$\mathscr{Y}$をのせた皿の方が下がる”)に対し$\mathscr{X}$の〈何か〉よりも$\mathscr{Y}$の〈何か〉の方が大きいという形の発想をするとき，量(大きさ)が対象として起こることになる。そして，量(大きさ)がこのような形で対象化されることによって，モノは“量(大きさ)をもつもの”になる。

7.5　量(大きさ)の順序関係

先のてんびんの状態図のうちの後の二つを，それぞれ［$\mathscr{X}$］<［$\mathscr{Y}$］，［$\mathscr{X}$］>［$\mathscr{Y}$］と読む。そして，量(大きさ)$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$に関する

$$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{y}>\boldsymbol{x}$$

(即ち，<に関して皿$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$の区別が本質的ではないということ)を，てんびんの論理と定める。——そこで特に，$\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x}$を，$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$の別表現として扱えるようになる。

さらに，<が推移法則：

$$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}\text{かつ}\boldsymbol{y}<\boldsymbol{z} \Longrightarrow \boldsymbol{x}<\boldsymbol{z}$$

を満たすことを，てんびんの論理と定める。このとき，関係≦(＝あるいは<)は全順序関係になる。

7.6　量(大きさ)の加法＋の導入

量(大きさ)の概念の導入のもとになった対象概念は，〈てんびんの皿にのるモノ〉である。いまこの意味で，対象$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$が一緒になってまた一つの対象になることを，てんびんの論理と定める。

〈$\mathscr{X}$と$\mathscr{Y}$を一緒にする/$\mathscr{X}$に$\mathscr{Y}$を付加すること〉としての対象を$\mathscr{Z}$で表わすとき，量(大きさ)の内算法＋を

$$[\mathscr{X}]+[\mathscr{Y}]=[\mathscr{Z}]$$

で定義する。

量(大きさ)$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$に対する$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$を，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の和と呼ぶ。

さらにこのとき，量(大きさ)$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$に関して

(1)　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

(2)　$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

(3)　$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$

(4)　$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{x}' \Longrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}$

であることを，てんびんの論理と定める。

第二の条件から，特に，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$と$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$の区別は本質的ではない。そこでこれらに対して$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$の表現を用いていくことにする。またこれから，

$$\boldsymbol{x}_1+\cdots\cdot+\boldsymbol{x}_n$$

の表現が帰納的に定義できることになる。

量(大きさ)$\boldsymbol{x}$と自然数$\boldsymbol{n}$に対し，$\boldsymbol{x}$の$\boldsymbol{n}$回の累加を$\boldsymbol{x}_{\times}\boldsymbol{n}$で表わし，“$\boldsymbol{x}$の$\boldsymbol{n}$倍”と言い表わす。明らかに，

$$(\boldsymbol{x}_{\times}\boldsymbol{m})_{\times}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}_{\times}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})$$

また，条件(4)より，

$$\boldsymbol{x}_{\times}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{x}_{\times}\boldsymbol{n} \Longrightarrow \boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$$

さらにつぎが成り立つ(註)：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}' \Longrightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'\ \text{かつ}\boldsymbol{x}<\boldsymbol{x}' \Longrightarrow \boldsymbol{y}>\boldsymbol{y}'$$

(註) (1)　$\boldsymbol{y}<\boldsymbol{y}'$ならば$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'$，$\boldsymbol{y}>\boldsymbol{y}'$ならば$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'$。結局，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{y}'$ならば$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'$。

(2)　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'>\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'$。このとき$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'$ではない。また$\boldsymbol{y}<\boldsymbol{y}'$とすると，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'$。結局，$\boldsymbol{y}>\boldsymbol{y}'$でなければならない。

7.7　量(大きさ)のフィクションの構築

てんびんの概念装置——特に，〈てんびんの

皿にのる対象〉の集合の仮構——は，量の系の導出のきっかけに過ぎない。即ち，一旦量(大きさ)を導入するや，われわれはそれを〈てんびんの上で互いにつりあう対象の類の内包〉のように考えることをやめる[註]。ここからは，量(大きさ)が理論構築の素材になる。

（註）例えば，"量(大きさ)aのn等分に相当する量(大きさ)を実現する対象——［$\mathfrak{X}$］のn倍がaであるような対象$\mathfrak{X}$——が存在するかどうか"という形で頭を悩ませることはしない。

7.8　量(大きさ)の分数倍

量(大きさ)u, u'と自然数m, m', n, n'に対する関係$u {}_{\times} m = u' {}_{\times} m'$，$u {}_{\times} n = u' {}_{\times} n'$からは，$m/n = m'/n'$が導かれる[註1]。そこで，つぎの分数倍の定義を導入することができる。

即ち，量(大きさ)x, yに対し，$x = u {}_{\times} m$, $y = u {}_{\times} n$となる量(大きさ)uと整数m, nが存在するとき，yはxのn/m倍であると言う。

量(大きさ)xと分数ξ, ηに対し，xのξ倍とxのη倍が等しいならば$\xi = \eta$[註2]。

つぎの二つの条件は同値である[註3]が，われわれはこれを量(大きさ)の条件に加える：

(1)　任意の量(大きさ)xと分数ξに対して，xのξ倍が定義される；

(2)　任意の量(大きさ)xと自然数nに対して，$x = y {}_{\times} n$となる量(大きさ)yが存在する（"等分可能性"）.

このとき，xのm/n倍は$x = y {}_{\times} n$となるyのm倍。

量(大きさ)xと分数ξに対しxのξ倍を$x {}_{\times} \xi$で表わす。

分数倍${}_{\times}$は自然数倍${}_{\times}$の拡張になっている——自然数nに対する${}_{\times} n$が${}_{\times}(n/1)$と一致するという意味で[註4]。

さらに，量(大きさ)xと分数ξ, ηに対し，

$$x {}_{\times} \xi < x {}_{\times} \eta \iff \xi < \eta \text{ [註5]}$$

（註1）$u {}_{\times} (m \times n') = (u {}_{\times} m) {}_{\times} n' = (u' {}_{\times} m') {}_{\times} n' = (u' {}_{\times} n') {}_{\times} m' = (u {}_{\times} n) {}_{\times} m' = u {}_{\times} (m' \times n)$。よって，$m \times n' = m' \times n$，即ち$m/n = m'/n'$。

（註2）xのξ倍（$= x$のη倍）をyで表わす。量(大きさ)u, vと自然数m, n, p, qが存在して，$x = u {}_{\times} m = v {}_{\times} p$, $y = u {}_{\times} n = v {}_{\times} q$, $\xi = n/m$, $\eta = q/p$となる。そしてこのとき，$u {}_{\times} (m \times q) = (u {}_{\times} m) {}_{\times} q = (v {}_{\times} p) {}_{\times} q = (v {}_{\times} q) {}_{\times} p = (u {}_{\times} n) {}_{\times} p = u {}_{\times} (n \times p)$。よって，$m \times q = n \times p$，即ち$n/m = q/p$。

（註3）(1)⇒(2)：xの$1/n$倍をyとする。この意味は，$x = u {}_{\times} p$, $y = u {}_{\times} q$, $1/n = q/p$となる量(大きさ)uと自然数p, qが存在することであるが，このとき$y {}_{\times} n = (u {}_{\times} q) {}_{\times} n = u {}_{\times} (q \times n) = u {}_{\times} (p \times 1) = (u {}_{\times} p) {}_{\times} 1 = x {}_{\times} 1 = x$。

(2)⇒(1)：$\xi = m/n$として，$x = y {}_{\times} n$とする。このとき，$y {}_{\times} m$はxのξ倍。

（註4）量(大きさ)xと自然数nに対し，$x {}_{\times} (n/1)$は$x = y {}_{\times} 1$となるyのn倍。結局，$x {}_{\times} n$。

（註5）$\xi = m/p$, $\eta = n/p$, $x = y {}_{\times} p$とすると，$x {}_{\times} \xi = y {}_{\times} m$, $x {}_{\times} \eta = y {}_{\times} n$。そこで$x {}_{\times} \xi < x {}_{\times} \eta$は$m < n$と同値。そしてこれは$\xi < \eta$と同値。

7.9　量の系の導入

いま，量(大きさ)全体の集合Qを仮構する。量(大きさ)については和$+$と分数倍${}_{\times}$が定義されているから，Qの導入は系$((Q, +), (\mathbb{B}, +, \times), {}_{\times})$：

(i)　Qの内算法$+$

(ii)　Qの$(\mathbb{B}, +, \times)$を作用域とする外算法${}_{\times}$

の導入になっている。$+$を加法と呼び，${}_{\times}$を分数倍の作用と呼ぶ。

さらに，系$((Q, +), (\mathbb{B}, +, \times), {}_{\times})$はつぎの条件を満たすものであると定める。即ち，任意の$u \in Q$に対して定義される写像：

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &\longrightarrow Q; \\ \xi &\longmapsto u {}_{\times} \xi \end{aligned}$$

と恒等写像

$$id : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

の対は，系$((\mathbb{B}, +), (\mathbb{B}, +, \times), \times)$の，系$((Q, +), (\mathbb{B}, +, \times), {}_{\times})$の上への

同型。

この同型——代数的構造に関する同型——は，順序同型になる(註1)。

そしてこのとき，順序を伴う量の系（(Q, ＋, ≦), ($\mathbb{B}$, ＋, ×, ≦), ${}_\times$）が得られていることになる。

ここで定めた条件の含意として，特につぎのことを確認しておこう。

(1) 任意のu, $x \in Q$に対し，$x = u_\times \xi$となる$\xi \in \mathbb{B}$が一意的に存在する——これは，uを単位とする測定が可能ということである．

(2) $$(x_\times \xi)_\times \eta = x_\times(\xi \times \eta)$$
$$x_\times(\xi + \eta) = x_\times \xi + x_\times \eta$$ (註2)

(3) 任意の$x < y$に対し，自然数nで$x_\times n > y$となるものが存在する（“アルキメデスの公理”）(註3)．

（註1）既に示したように，$u \in Q$とξ，$\eta \in \mathbb{B}$に対し，$u_\times \xi < u_\times \eta$は$\xi < \eta$と同値。

（註2）$u \in Q$に対する同型対応：$\mathbb{B} \longrightarrow Q$；$\xi \longmapsto u_\times \xi$を$f$で表わし，$x = u_\times \alpha$とする。

(1) $(x_\times \xi)_\times \eta = (f(\alpha)_\times id(\xi))_\times \eta = f(\alpha \times \xi)_\times id(\eta) = f((\alpha \times \xi) \times \eta) = f(\alpha \times (\xi \times \eta)) = f(\alpha)_\times id(\xi \times \eta) = x_\times(\xi \times \eta)$。

(2) $x_\times(\xi + \eta) = f(\alpha)_\times id(\xi + \eta) = f(\alpha \times (\xi + \eta)) = f(\alpha \times \xi + \alpha \times \eta) = f(\alpha \times \xi) + f(\alpha \times \eta) = f(\alpha)_\times id(\xi) + f(\alpha)_\times id(\eta) = x_\times \xi + x_\times \eta$。

（註3）$u \in Q$に対する同型対応：$\mathbb{B} \longrightarrow Q$；$\xi \longmapsto u_\times \xi$を$f$で表わし，$x = u_\times \alpha$，$y = u_\times \beta$とする。$f$は順序同型になっているから，$x < y$は$\alpha < \beta$を意味する。分数$\alpha$，$\beta$に対しては，自然数$n$で$\alpha \times n > \beta$となるものがとれる。そしてこのとき，$x_\times n = (u_\times \alpha)_\times n = u_\times(\alpha \times n) > u_\times \beta = y$。

8　数/量の絵

われわれは数や量の直線表示をすることがある。このときの直線は，数/量の絵である。

本章では，数/量の絵の論理を改めて確認する。

8.1　絵

われわれは，数/量の“イメージ化”を試みることがある。数/量の“イメージ”は，実在のレベルでは，何がしかのモノ（事態）Xである。そしてXが数/量の“イメージ”であるとき，そこにはXの読み方が同時に与えられていることになる。この読み方は，X自身が喚起するものではない。Xに対する読み方は，Xの外にある。

“読み方が与えられているモノ”の概念を表わすことばとして，以下“絵”を使うことにする。

絵は，読み（ことば）を伴うモノであり，モノと読みの対である。但し，読みが約束として了解されていれば（特に，絵とその読みが慣習化していれば），読みの明示は省略できる。このとき，絵は約束の上で保っている。約束が知られていなければ，それはモノに還る。

モノはそれに“数/量”が読まれるとき，結果論として“数/量の表現”になる。また，数/量の表現として一旦捉えられたモノは，数/量の絵とすることができる(註)。しかし絵は，このような結果論としての“表現”ではない。絵は，はじめから表現が意図されているところのものである。

絵は，論理的対象である。即ち，対象としてのそれは，数/量が考えられている論理の中のことばと等価である。ことばと等価であるのに絵がことさらに作り出されるのは，あくまでも思考との相性の良さ，あるいは思考の便宜——ことばの操作は，絵の操作の形で行なうと楽になることがある——のためである。

（註）例えば，日差しに応ずる棒の影の移動は，それに時刻/時間が読まれることで時刻/時間の表現になる。そしてこれに対しては，“時刻/時間の絵”（“日時計”）の読み換えを——しようと思えば——できる。

8.2 数/量の絵

8.2.1 数/量の絵

直線と平面は，それぞれ実数と複素数を係数とする位の系として解釈できる(註)。そこで，係数の系が実数あるいは複素数の系に埋め込み可能であるような位の系$\mathcal{S}$に対しては，これの絵として直線あるいは平面を用いることができる。

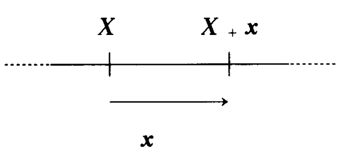
したがってまた，数の系$\mathcal{N}$ないし量の系$\mathcal{Q}$から導出される位の系$\mathcal{S}$が直線あるいは平面をそれの絵としてもてるとき，この絵を$\mathcal{N}$ないし$\mathcal{Q}$の絵とすることができる。

（註）これに対し，（３次元)空間を位の系として解釈することはできない。

8.2.2 直線，平面に対する位の系の解釈

直線——１次元ユークッド空間として定式化された直線——は，つぎのように位の系（S_E, (Q_E, $+$), ($\mathbb{R}$, $+$, $\times$), $_\times$), $_+$）として解釈できる：

(1) S_Eは，点集合としての直線
(2) Q_Eは，点の変位ベクトル（移動ベクトル）全体の集合
(3) $_+$は，直進移動：
(4) Q_Eの$+$は，変位ベクトル（移動ベクトル）の合成
(5) $\mathbb{R}$は，変位ベクトルに対する倍作用素の集合
(6) $_\times$は，変位ベクトル（移動ベクトル）に対する実数の "倍" 作用
(7) $\mathbb{R}$の$+$，$\times$は，それぞれ倍の和および倍の合成



ここで，基準$O_E \in S_E$と単位$e \in Q_E^*$は任意に固定すればよい。

また，平面——２次元ユークッド空間として定式化された平面——は，以下のように位の系（S_E, (Q_E, $+$), ($\mathbb{C}$, $+$, $\times$), $_\times$), $_+$）として解釈できる。

(1) S_Eは，点集合としての平面
(2) Q_Eは，点の変位ベクトル（移動ベクトル）全体の集合
(3) $_+$は，直進移動：
(4) Q_Eの$+$は，変位ベクトル（移動ベクトル）の合成
(5) $\mathbb{C}$は，変位ベクトルに対する "倍/回転" 作用の集合
(6) $_\times$は，変位ベクトル（移動ベクトル）に対する複素数の "倍／回転" 作用：
Q_Eの要素$x = u\,_\times[r,\ \theta]$に対し，
$$x\,_\times[s,\ \tau] = u\,_\times([r,\ \theta] \times [s,\ \tau])$$
$$= u\,_\times[r \times s,\ \theta + \tau]$$
(7) $\mathbb{C}$の$+$，$\times$は，それぞれ倍/回転作用の和および合成：
$$(\xi + i\eta) + (\xi' + i\eta') = (\xi + \xi') + i(\eta + \eta')$$
$$[r_1,\ \theta_1] \times [r_2,\ \theta_2] = [r_1 \times r_2,\ \theta_1 + \theta_2]$$

8.2.3 位の系の絵——位直線/位平面

Kを$\mathbb{R}$または$\mathbb{C}$とし，(N, $+$, $\times$) を (K, $+$, $\times$) の中に埋め込むことができる数の系とする。位の系（S, ((Q, $+$), (N, $+$, $\times$), $_\times$), $_+$）——以下，(S, Q, N) と略記——は，以下に示すように，位の系として見た直線/平面（S_E, (Q_E, $+$), (K, $+$, $\times$), $_\times$), $_+$）——以下，(S_E, Q_E, K) と略記——に埋め込める。

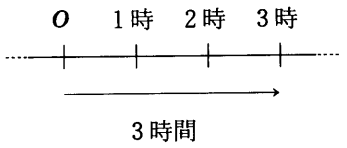
位の系 (S, Q, N) の基準と単位を，それぞれ$O \in S$，$u \in Q^*$とする。このとき，(S, Q, N) の (S_E, Q_E, $\mathbb{R}$) への同型（埋め込み）(F, f, id_N) で，

$$F(O) = O_E,\ f(u) = e$$

となるものが一意的に存在する(註)。そしてこのFによって，(S, Q, N) は (S_E, Q_E, $\mathbb{R}$) としての直線/平面(の中)に表現できる。

特に，$K = \mathbb{R}$で$N \neq N_D$の場合，(S, Q, N) は半直線(の中)に表現される。

例：　時刻は，時間を量の系として随伴する位の系として，つぎの様な具合に直線の上に表現される：



（註）(1)　同型 $(F,\ f,\ id_N):(S,\ Q,\ N)\longrightarrow(S_E,\ Q_E,\ \mathbb{R})$ の F, f は，$F(O)$, $f(u)$ で決まる。実際，S の任意の要素は $O {}_{+} u {}_{\times} \xi$ の形に書けて，$F(O {}_{+} u {}_{\times} \xi)=F(O) {}_{+} f(u) {}_{\times} id_N(\xi)=F(O) {}_{+} f(u) {}_{\times} \xi$。

(2)　Q の Q_E の上への同型 f で，$f(u)=e$ となるものが一意的に存在する。そしてこの f に対して，$F: S\longrightarrow S_E$ を

$$F(O {}_{+} x)=O_E {}_{+} f(x)$$

で定義するとき，$(F,\ f,\ id_N)$ は $(S,\ Q,\ N)$ の $(S_E,\ Q_E,\ \mathbb{R})$ への同型になる。さらにこのとき，$F(O)=F(O {}_{+} 0)=F(O) {}_{+} f(0)=O_E {}_{+} 0=O_E$。

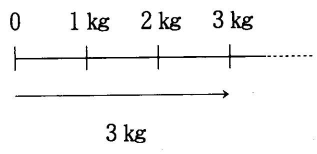
8.2.4　量直線/量平面，数直線，複素平面

数の系$\mathcal{N}$ないし量の系$\mathcal{Q}$から導出される位の系$\mathcal{S}$が直線/平面をそれの絵としてもてるとき，この絵を$\mathcal{N}$，$\mathcal{Q}$の絵とすることができる(註)。

“数直線”は，この意味での〈実数の系の絵〉であり，直接的には位としての実数の絵である。実数の系に埋め込むことができる数の系に対しては，〈埋め込み〉に対応して，数直線の中にこれを表示することができる。

同様に，“複素平面”は複素数の系の絵であり，直接的には位としての複素数の絵である。

（註）例えば重さが，1次元の量の系として

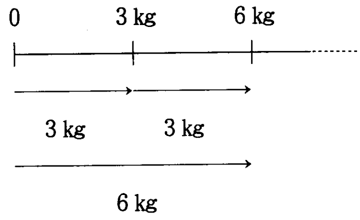


のように直線表示される。――ここで，直線上の点である 3 kgは S の元として，矢線の 3 kgは Q の元として，それぞれ意味づけられる。

このとき，例えば“3 kgに 3 kgで 6 kg”の図式は，

$$3\,\mathrm{kg} {}_{+} 3\,\mathrm{kg}=(0 {}_{+} 3\,\mathrm{kg}) {}_{+} 3\,\mathrm{kg}$$
$$=0 {}_{+} (3\,\mathrm{kg}+3\,\mathrm{kg})=0 {}_{+} 6\,\mathrm{kg}=6\,\mathrm{kg}$$

と読むことによって，



のようになる。