現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「数」がわかる本 シリーズ

図解

数学編 (3)

いろいろな数が「数」であること

北海道教育大学教授
宮下英明 著

「数」がわかる本 数学編 (3)

いろいろな数が「数」であること

本書について

巷には「数」を主題にした一般者向け教養本や現職教員・教員養成課程学生を対象にした教科書的な書籍が，いろいろ出回っています。しかし，「そもそも数とは？」の視点から論じるようなものは，どうも無いようです。
「そもそも数とは？」に対しては，「数とはこのような形式のことである」というように答えることになります。この「形式」を解説している書籍がありません。

本テキストは，「数とはこのような形式のことである」をできるだけ簡単に，しかし必要な要素を落とさずに，解説しようとするものです。

対象とする読者

このテクストは，つぎのようなひとを対象に作成しています：

- o つぎの疑問をもったひと：
  「*学校で自然数，分数，正負の数，複素数といくつか数を習ってきたけど，そもそも数って何？*」
  あるいは，このような疑問をもったことがないひと。
- o 数とは「ものを数えたり, ものに番号をつけたりするもの」だと思っているひと。(自然数の田舎に留まって，これが世界だと思っているひと。)
- o 数はタイルを使って指導できるものだと思っているひと。
- o「マイナスとマイナスをかけたらプラス」を説明できないひと。
- o 複素数とは，実数解をもたない方程式に解をもたせるために人工的につくった「ウソんこ」の数だと思っているひと。

読者は，このテキストに書いていることがこれまで学校で教わってきたこととはぜんぜん違うことに，最初とまどうでしょう。

しかし，ワン・パターンが相手であることを知り，「マイナスとマイナスをかけたらプラス」とか「複素数は正負の数の延長」みたいなことがわかり，そして正負の数や複素数の積を意味の理解に立って簡単にできるようになっている自分を見るとき，とまどいは「目から鱗が落ちる」に変わるでしょう。

このテキストの読み方

「そもそも数とは？」の問いに答えるという趣旨から，内容的に必要最小限のこと，そして理解のために必要最小限のことを，話すようにします。

しかし「必要最小限のこと」にとどめても，読者によっては負担のある分量になるでしょう。そこで,「とばし読み」の方法を示すことにします。

「とばし読み」は，つぎの優先順位に従ってください：● → ◍ → ○

1. 概要 (全体マップ)		●
2.「数」の意味	数は，２量の比を表すためのもの	●
	扱いたい量が新たに出てきて，	●
	新しい数がつくられる	
3. 比の表現 (数表記のきまり)	量の一般表現に使う絵を定める	●
	分数の場合	●
	実数の登場	●
	正負の数の場合	●
	複素数の場合	●
4. 量表現		●
5. 位表現	位表現の構造──（基準 , 単位 , 数）	◍
	直線での位置表現と正負の数	◍
6. 数の積	平面での位置表現と複素数	◍
	積の意味 (記号「×」の文法)	●
	求積公式　求積公式	●
	正負の数の場合	●
	複素数の場合	●
	分数の場合	●

7. 数の和	量の和		◍
	和の意味 (記号「＋」の文法) の意味		◍
	求和公式	求和公式	○
		正負の数の場合	○
		複素数の場合	○
8. 自然数の和と積		分数の場合	○
	求和アルゴリズム		○
9. 数の商と差	求積公式		○
	商の意味 (記号「÷」の文法)		◍
	差の意味 (記号「−」の文法)		◍
	正負の数における３種類の「−」の区別		◍
10. 量とは？			●
11. おわりに——これ以降の勉強の方向			●

以下，この内容構成について，４点説明します。

1. 自然数に関する内容が僅かでしかも優先順位が低いことについて

新しい数は，既にある数を構成要素にしてつくられます。建物の喩えで言うと，ユニットの形で与えられている建材を組み合わせるという感じです。

さて，自然数はすべての数の出発点になります。そこで，自然数の話は「建材を無いところからつくる」話が主要になります。これは重要な内容ですが，このテキストの主題は「数とはどういうものか？」の問いに形 / 構造で答えるというものです。よって,「建材づくり」の内容をカットした方が，話全体の見通しがよくなります。

よって，建物の形 / 構造の話にいちおう慣れたところで，建材づくりの内容に入ることを勧めます。

これが,「とばし読み」で自然数の優先順位を低くしていることの理由です。

2. 数の積を，数の和よりも先に扱っていることについて

形式としては，積の方が和よりも簡単になります。したがって，積を和よりも先に取り上げています。

ただし，自然数では，求積公式が和を用いることになり，求和アルゴリズム → 求積公式 の順の扱いになります。他の数 (分数，正負の数，複素数) では，積と和は互いに独立しています。

3. 求積・求和公式で，分数が最後になっていることについて

求積・求和公式は，分数の場合が最も複雑になります。よって，分数を最後にもってきています。

4. 商と差をいっしょに扱っていることについて

商と差の定め方は，同型になります。したがって，まとめて取り上げています。

ただし，正負の数の求和公式では分数の差も出てきますので，この意味では，扱う順序が前後しています。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

0. はじめに

0.1 正負の数，複素数まで拡げないと「数」は見えてこない

「山とはどんなものか？」「町とはどんなものか？」「国とはどんなものか？」‥‥

自分が棲んでいるところに留まって考えたことは，別の世界に出て行くことでたちまち壊れてしまいます。
自分が棲んでいるところに留まるとは自足した状態ですから，そもそも「山とはどんなものか？」「町とはどんなものか？」「国とはどんなものか？」‥‥という問題を立てることもないわけです。

自分が棲んでいるところから外に出ることで，自分が偏見の中に棲んでいたことが発見されます。
この意味で，外に出ることが＜解毒作用＞になります。

「数とはどんなものか？」を考えるのも，これと同じです。
自然数や分数にとどまっていては,「数」は見えてきません。正負の数, 複素数へと拡げる必要があります。

> ただし，いろいろな数にただ出会うというのはだめで，「数とはどんなものか？」の視点からそれらがきちんと扱われることがなければ, やはり「数」は見えてきません (「数とはどんなものか？」の意識そのものが起こりません)。

0.2「数がわかる」とは，何がどうわかること？

「山とはどんなものか？」「町とはどんなものか？」「国とはどんなものか？」‥‥の問題意識は，外に出て多様な世界に出会うごとに，＜本質＞探求の形をとるようになります。

「数とはどんなものか？」も，これと同じです。
自然数のつぎに分数，分数のつぎに正負の数，正負の数のつぎに複素数‥‥と異なる数が現れるごとに，「数とはどんなものか？」の問題意識は，「数」の＜本質＞（自然数，分数，正負の数，複素数‥‥のすべてに通底 / 共通しているもの) を求めるような形になります。

数学では，＜本質＞を形 / 構造としてとらえます。
ですから，「数とはどんなものか？」に対する答えはつぎの形になります：

「こんな形 / 構造のものが，数である」

結論から言いますと，「数とはどんなものか？」に対する答えは，つぎのこと (「数」の道具性) を述べるものになります：

1. 数は，２量の比 (倍の関係) を表すためのもの
2. 倍の合成 (倍の倍) を扱うために，数の積 (記号「×」) を導入する
3. 倍の和を扱うために，数の和 (記号「＋」) を導入する

自然数，分数，正負の数，複素数‥‥といろいろな数が出てくるのは, 扱いたい量に人の欲が出てくるからです。すなわち，これまでつくってきた数では料理できない量を扱いたくて，新しく数をつくることになります。そしてつくったものを「数」と呼ぶ根拠は，上に示した道具的意味です。

0.3. 概要 (オーバービュー)

数は，量の比を表すためのものとしてつくられます。

最初は簡単な量を扱うことからはじまります。「個数」です。そして，「個数」を扱う数がつくられます。自然数です。

個数の「個」の意味は，「部分を考えない」ということです。すなわち「原子」です。
そこで，「任意に部分を考えることのできる量」を扱いたいという欲が出てきます。そしてこれを扱う数がつくられます。分数です。

分数は，「任意に部分を考えることのできる量」の比を，自然数２つを使って表そうとするものです。しかし，自然数２つを使うやり方では表せない比があることに気づきます。
そこで，このような比も扱えるように分数を拡張します。実数です。

さてここから，扱いたい量に対する欲は，新たな方向に進みます。すなわち，「向きをもつ量」を扱うということです。

最初は，これの最も簡単な場合として，「正逆２方向の向きをもつ量」から入ります。この量の比を扱うためにつくられる数が，正負の数です。

「正逆２方向の向きをもつ量」は，＜直線上の移動＞に表現できます。そこで，これの延長として，＜平面上の移動＞に表現できる量を扱おうということになります。この量の比を扱うためにつくられる数が，複素数です。

これのさらなる延長は ,「＜空間内の移動＞に表現できる量を扱う」です。この量の比を扱うための数をつくると，四元数というものになります。(四元数はこのテキストでは取り上げません。)

ここでいう直線，平面，空間は，数学ではそれぞれ１次元，２次元，３次元のユークリッド空間として定められるものです。したがって，正負の数以降の数の導入は，量の空間次元拡張に応ずる展開ということになります。

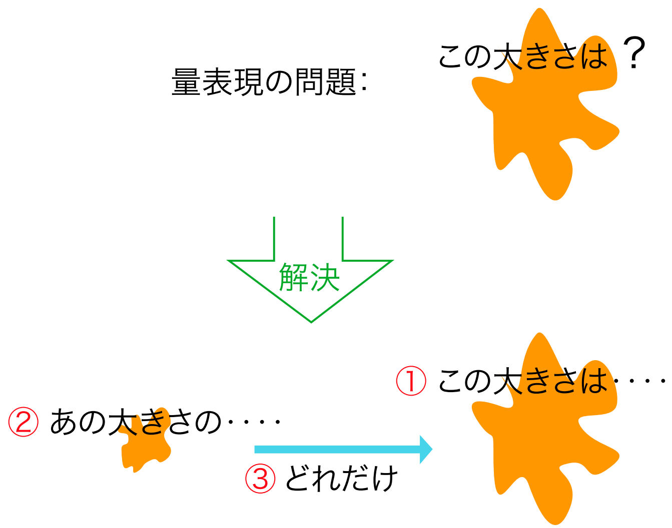
以上のように，扱いたい量に応じて数がつくられます。しかし，このように言うと，「数は人為的で，量は人為以前」のように受け取られかも知れません。
事実はどうなのでしょう？
量も人為です。すなわち，「ことばが＜世界＞を構成する」と同じ意味で，わたしたちは数を通して量を構成しています。

1. 「数」の意味

1.1　数の起こり：量表現

「数」は，量表現から起こります。

人が量 (大きさ) を表す方法には，いろいろあります。
身振りで量を表すのも，そのひとつです。
そして，数学の主題になる「量表現」は，つぎのものです：



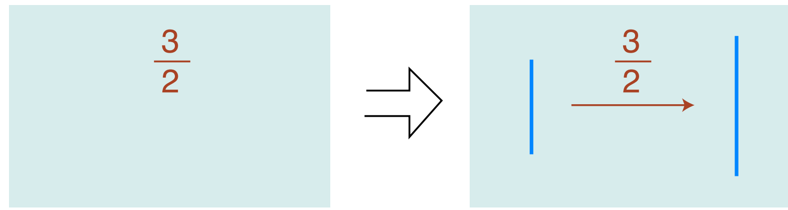
このときの「どれだけ」は，２量の比 (倍関係) になっています。
──ここが重要な点です！

そこで，２量の比 (倍関係) を表す道具をつくれば，量表現ができることになります。この道具が「数」です。
「数」は，このようにして起こります。

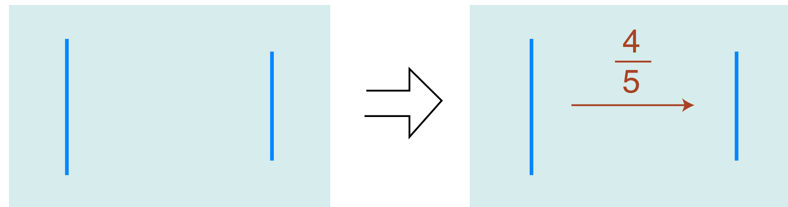
1.2　数は，２量の比を表すためのもの

数は「２量の比 (倍関係) を表すためのもの」としてつくられます。

数が現れるとき，そこにはその数で比が表現される２量があります：



逆に，２量に対しては，それの比の表現になる数が定まります：



このテキストでの学習のゴールは,「数は２量の比を表すもの」が「身につく」ことです。
たったこれだけです！

1.3 扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる

自然数，正負の数，複素数，‥‥ のように数がいろいろあるのは，「扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる」ためです：

扱いたい量に対する欲が出てくる；
これまでの数では料理できない量がここにある。
→ この量を扱える数をつくる。

自然数が扱う量は，「個がいくつ」と言い表される量です。

ここで,「個」には「部分を考えない」という含意があります。つまり,「個」は「原子」です。

例：硬貨，切ることを考えないりんご

部分のある量を扱いたいということで，分数がつくられます。

「部分がある」とは，「切る / 分割する」を考えることができるということです。

例：長さ / 距離，面積，体積，重さ，時間，速さ，クリスマスケーキ

分数で扱った量にさらに正逆２方向の向きが加わったものを量としてを扱いたいということで，正負の数がつくられます。

例：直線上正逆２方向の移動，昇降，増減，正逆２方向の速さ，時間の経過と遡行

正逆２方向とは，直線上方向自由（1 次元空間内方向自由）ということです。これを延長すると，平面上方向自由 (2 次元空間内方向自由)になります。そして平面上方向自由の量を扱いたいということで，複素数がつくられます。

例：平面上方向自由の移動，平面上方向自由の速さ

この先の延長は，どういうものになるでしょう？

「空間内方向自由（３次元空間内方向自由）の量を扱いたい」になり,「これを扱える数をつくる」になります。

このような数はあるの？――あります。「四元数」と言います。

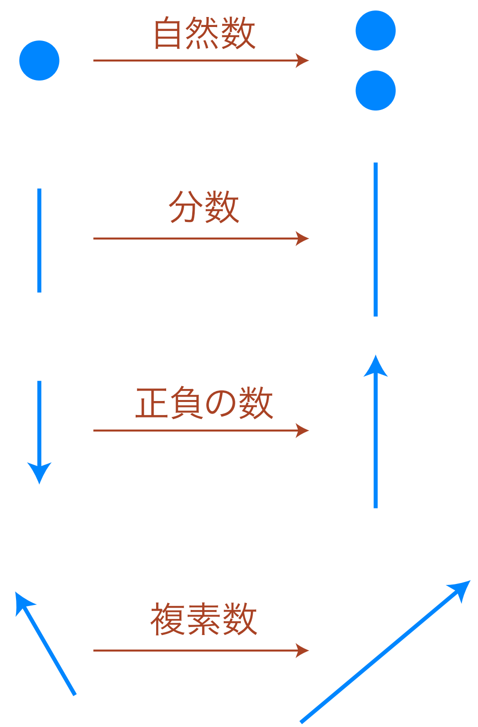
四元数を語れば数学的にかなり専門的な話になりますので，このテキストでは四元数に触れません。

四元数に進むと，数に関してもたれている「偏見」で気づかれにくい重要なことが，またひとつ明らかになります。

四元数では，積の可換性 (m × n = n × m) が成り立ちません。したがって，これまでほとんどあたりまえと思っていた「積の可換性」は「数」の条件ではない (「数」にとって本質的なことではない) ことになります。

1.4　量の一般表現に使う絵を定める

「扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる」のところで，つぎの図を示しました：



この図では，自然数，分数，正負の数，複素数が扱う量を一般的な形で表そうとしています。

分数では，線分の絵にしています。

実際，切る (部分をつくる) 操作を許す絵としては，線分がいちばんシンプルです。特に，線分の場合，切る操作は一つの形しかありません。

そして，「正逆２方向の向きを伴う量」の絵に延長できる絵という位置づけからも，やはり線分ということになります。

　線分の絵がひじょうに抽象度の高いものであることに，留意してください。――長さ / 距離はよいとして，面積，体積，重さ，時間，速さ，クリスマスケーキ，‥‥を線分に表すわけですから。

　実際，分数の表現の課題で，学生から線分の絵が出てくることはほとんどありません。たいてい，長方形や円（パイ / クリスマスケーキ / リンゴを等分するイメージ）になります。

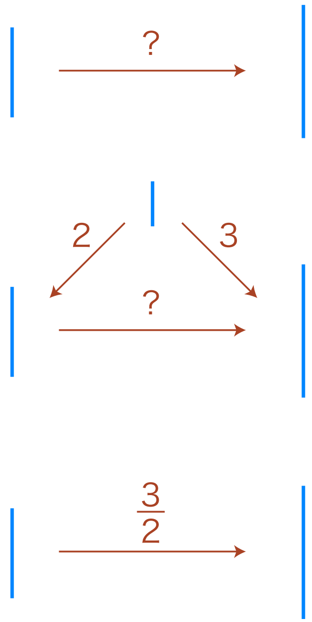
2.　比の表現 (数表記のきまり)

2.1　分数の場合

部分のある量 (「切る / 分割する」ができる量) を扱いたいとなったとき，これの比 (倍関係) の表現のために分数がつくられます。

このときの比 (倍関係) の表現のきまりはつぎのようになります：

> ２量が，第三の量のそれぞれ２倍，３倍になっているとき，
> この「2」と「3」をそのまま使う形で, 比を「3/2」で表す。



小学校では「3/2」を「２つに分けた３つ」と読ませていますが, これは「左辺の量を２つに分けた３つが右辺の量」から来ているわけです。

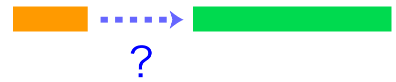
つぎが，ここでの比表現の要点になります：

自然数２つを使って比表現をつくる。

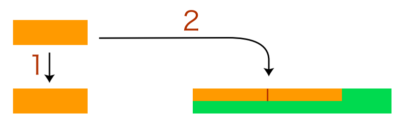
参考：ユークリッドの互除法

分数倍の値は，試行錯誤的に物を操作して求めるしかないように，一見思われます。しかしそうではありません。分数の値を求める手順があります。言い換えると，分数を値とするきちんとした測定法があります。——以下がそれです：

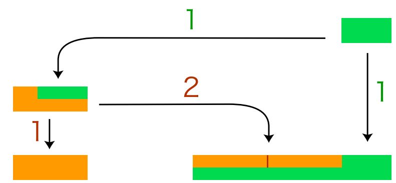
(1) 分数で何倍か？



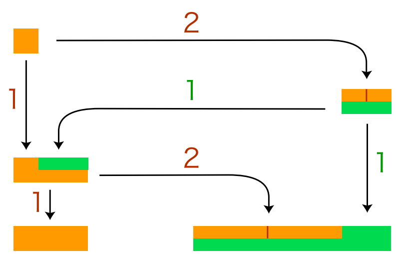
(2) 左が右にいくつ入るか？——２つ入って余りがでる。



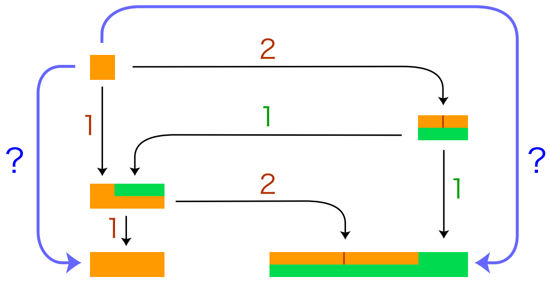
(3) 余りがもとの左にいくつ入るか——１つ入って余りがでる。



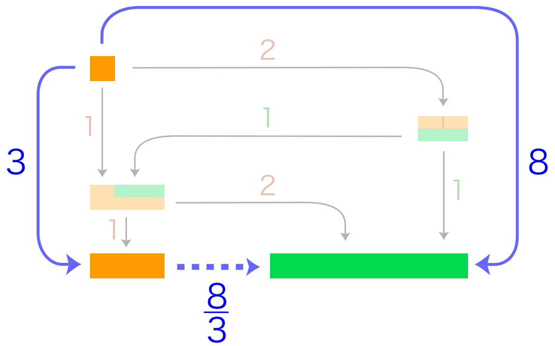
(4) 余りがもとの余りにいくつ入るか——２つ入って余りなし。



(5) 最後の余りが最初の２量にいくつ入るかが，計算で求められる：３と８。



(6) 最初の２つの量を，３つと８つに共約する量がとれたから，求める分数倍は 8/3。



この手順 (余り同士の互除を，余りがなくなるまで続ける) は，ユークリッドの互除法と呼ばれています。ユークリッドの互除法を使うと，つぎの両方が同時に得られます：

・二量の共約量（しかも最大共約量）
・分数の値（しかも既約分数）

2.2　実数の登場

先に，「＜部分のある量＞を扱いたいということで，分数がつくられる」と言いました。しかしこのとき，つぎの数学的事実にぶつかります：

＜部分のある量＞の比のうちには，
分数 (自然数２つ) では表現できないものがある。

中学数学で扱える内容としては，つぎの線分の長さの比が「分数で表現できない」ものになります：

（右は正方形の対角線で，正方形の辺は左の線分と同じ長さ）

そこでこのような比も扱えるように，分数を拡張することにしました。そしてつくられたのが，「実数」です。

実数を説明しようとすると，かなり専門的な話になります。したがって，ここでは実数に立ち入りません。 ——このテキストでは，つぎのように (曖昧な形で) 受け止めてもらえば，十分です：

「*分数で表現できない比も扱えるよう分数を拡張したのが，実数。*」

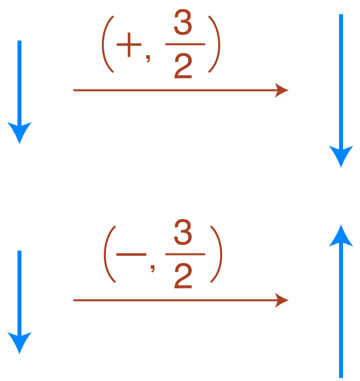
2.3　正負の数の場合

正負の数に対応する量は，正逆２方向の向きと大きさをもつ量です。(「扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる」)

正逆２方向の向きと大きさをもつ量の比 (倍関係) は，つぎの２つの情報の組として定めます：

1. 向きの変換に関する情報：同方向なら「＋」，逆方向なら「－」で表す。
2. 大きさの変換に関する情報：大きさの比を既知の数で表す。

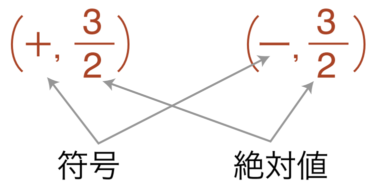
したがって，つぎのようになります：



以上が「正負の数」のしくみです。――そして，(＋ , 3/2)，(－ , 3/2) を「＋ 3/2」「－ 3/2」と表記しているわけです。

ここで, 言い回しを容易にするために,「向きの変換に関する情報」「大きさの変換に関する情報」をそれぞれ「符号」「絶対値」と呼ぶことにします。

さらに，正負の数 n の符号を sgn(n)，絶対値を ｜n｜ と表すことにします。



sgn((＋ , 3/2)) は ＋，　|(＋ , 3/2)| は 3/2
sgn((– , 3/2)) は –，　|(– , 3/2)| は 3/2

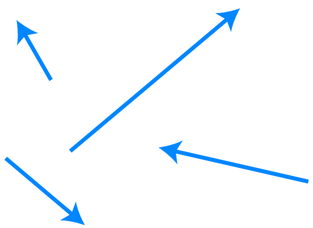
2.3　複素数の場合

正負の数に対応する量は

正逆２方向の向きと大きさをもつ量

でしたが，これは「直線上方向自由な向きと大きさをもつ量」と見ることができます。(「自由」と言っても, 正か逆かの自由しかありませんが。)

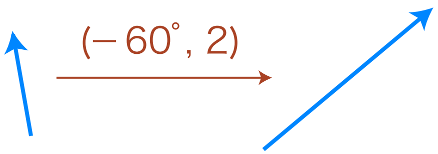
この「直線上方向自由な向きと大きさをもつ量」の考えを延長すると「平面上方向自由な向きと大きさをもつ量」(高校数学に出てくる「平面上のベクトル」) になります：



平面上方向自由な向きと大きさをもつ量の比 (倍関係) は，つぎの２つの情報の組で表せます：

1. 向きの変換に関する情報：どれだけの回転になっているか (角度)。
2. 大きさの変換に関する情報：大きさの比を既知の数で表す。

すなわち，つぎのようになります：



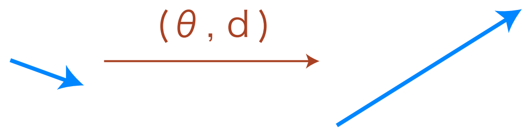
(数学では，時計回りがマイナスで，逆がプラス)

これが「複素数」のしくみです。――「正負の数」のしくみの単純な拡張であることを，確認してください。

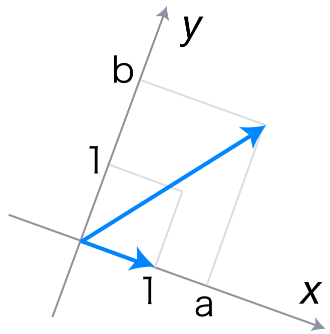
しかし，複素数をこのように説明すると，「高校で習った複素数はこんなんじゃない。高校では a ＋ b i みたいに習った。」のことばが返ってきそうです。

表現「a + b i」のしくみを，説明しましょう。

ここに (θ , d) と表現されている比があります：



左辺のベクトルをもとに x y 座標を作成し，この座標の中に右辺のベクトルをおきます：

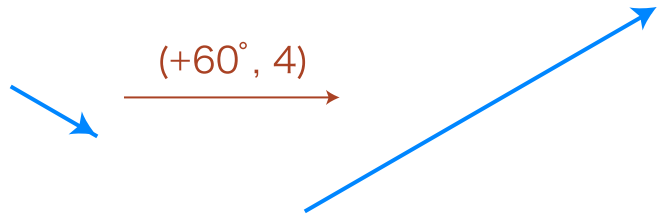


(y 軸の正方向は「x 軸の +90゜ 回転」のルールで決められる)

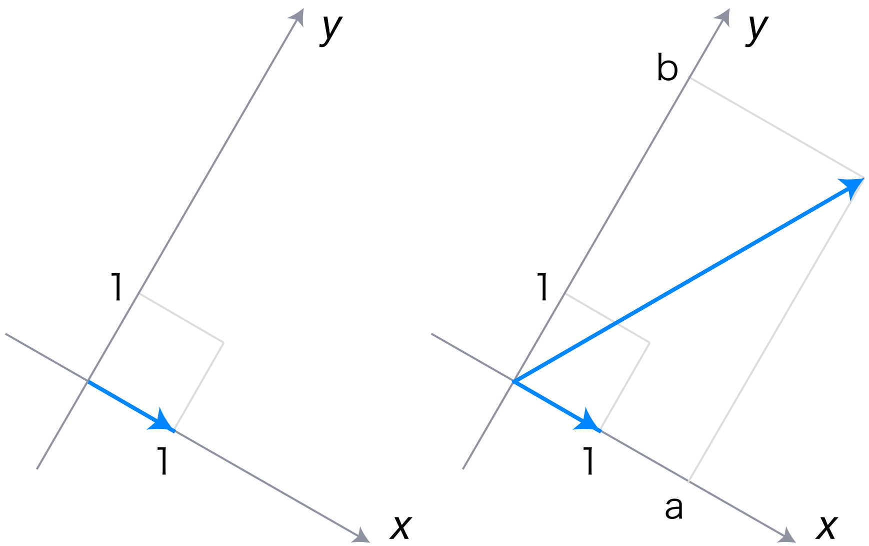
そしてこのときの a, b を使って，「a ＋ b i」を (θ, d) の別表現とし

ます。

練習として，具体的な例でやってみましょう：



左辺のベクトルをもとに x y 座標を作成し，この座標の中に右辺のベクトルをおきます：



このときの a ，b は，それぞれ 2 と $2\sqrt{3}$ です。よって，(+60°，4) は $2 + 2\sqrt{3}\,i$。

高校で複素数を習ったひとは，実はこの 2 つの表現とその換算法も

学習しています。（しかしほとんどのひとは，これの意味を知らないで / 意識しないで過ごしてきています。）

複素数 z の二つの表現 a ＋ b i と（θ，d ）に対し，z の偏角と呼ばれ arg(z) と表記されたのが θ で，z の絶対値と呼ばれ | z | と表記されたのが d です。

そして以下が，換算法です：

$$(\theta, d) \longrightarrow a + b\,i$$

$$a = d\cos\theta$$
$$b = d\sin\theta$$

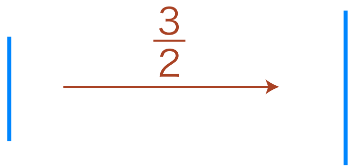
$$(\theta, d) \longleftarrow a + b\,i$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3.　量表現

２量の比を表すためにつくられた数は，量を表す道具になります。

実際, つぎは「左辺の量の 3/2 倍が右辺の量」の図ですが, これは「左辺の量をもとにして右辺の量を表わす」ものになっています：



特に, 左辺の量に例えば「A」の名前を与えれば, 右辺の量は「3/2A」と表現できます。

名前をつけられるなど＜もとにする量＞に特化された量は，「単位」と呼ばれます。

わたしたちが日常的に使う量表現は，この方法でつくられています。

たとえば「5 m (メートル)」「11.8 秒」「55kg(キログラム)」は，それぞれ「mの 5 倍の長さ」「秒の 11.8 倍の時間」「kg の 55 倍の重さ」の意味です。

ちなみに ,「＜もとにする量＞に特化された量」の意味で「単位」を理解している人は，きわめて稀です。すなわち，多くのひとが，単位がそれ自体一つの量であるというようには受けとっていません。

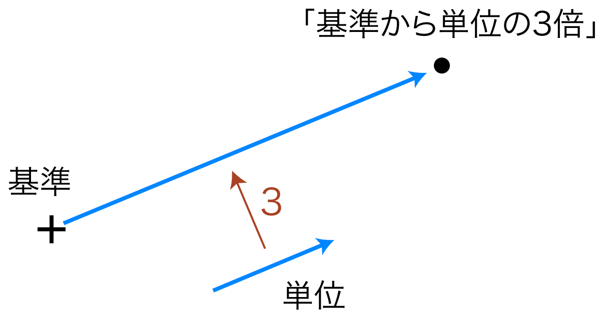
実際 ,「m (メートル)」「秒」「kg(キログラム)」と言えず「1 m」「1 秒」「1 kg」と言わないと落ち着かないのは，「m」「秒」「kg」を特定の量の名前と思っていないからです。

4.　位表現

4.1 位表現の構造——（基準，単位，数）

＜直線上の移動＞や＜平面上の移動＞に表現できる量の場合，数を使った量表現はさらに位（位置）の表現へと進みます。

「*基準から単位の n 倍のところ*」が，このときの位の表現です：

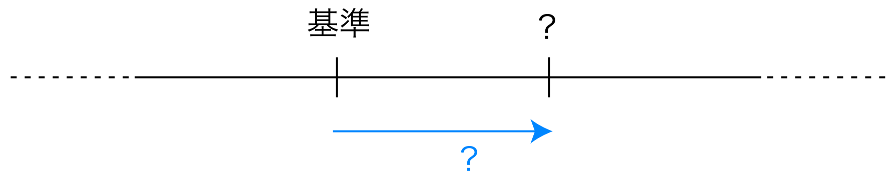


4.2 直線での位置表現と正負の数

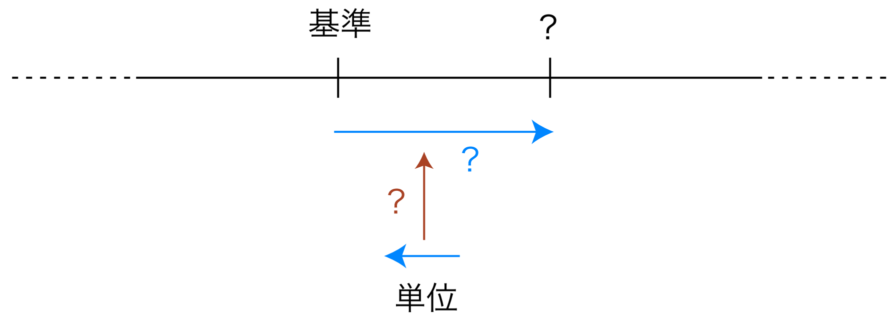
直線上の位置の表現は，つぎのようになります。——特に，直線上の位置の表現では，正負の数が使われることになります。

1. この位置を言い表したい：

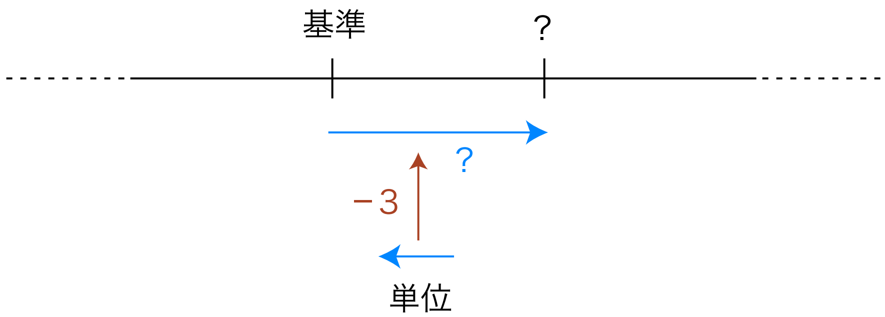
2. 基準をとって，「基準からどれだけ」と言い表そう：



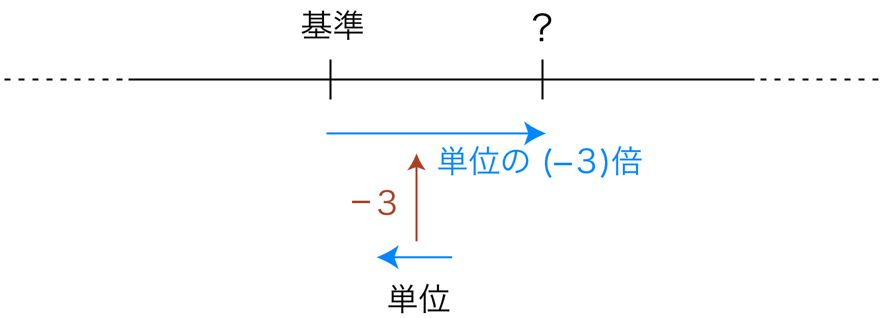
3. 単位をとって，「どれだけ」を「単位の何倍」と言い表そう：



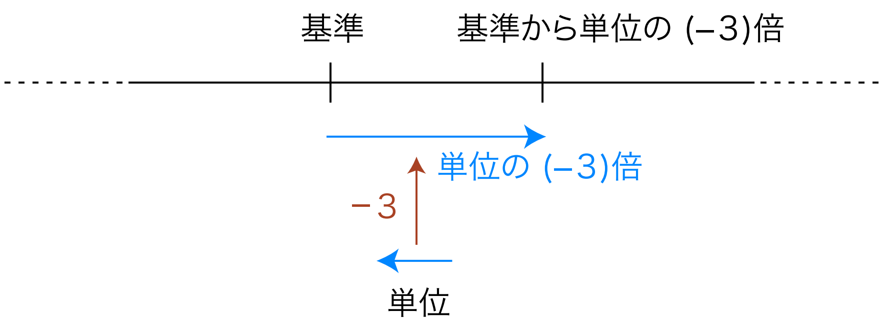
4. 単位の (ー3) 倍だ：



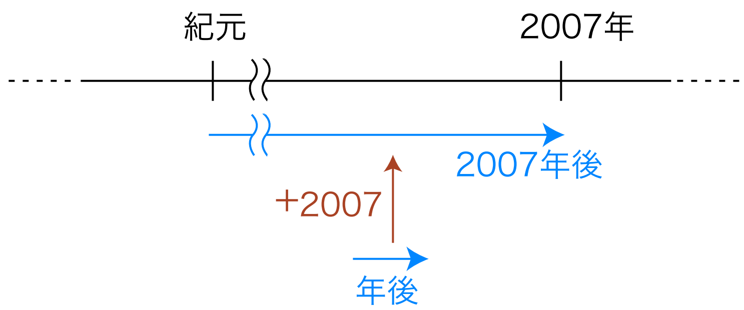
5. よって，「どれだけ」は「単位の (ー3) 倍」：

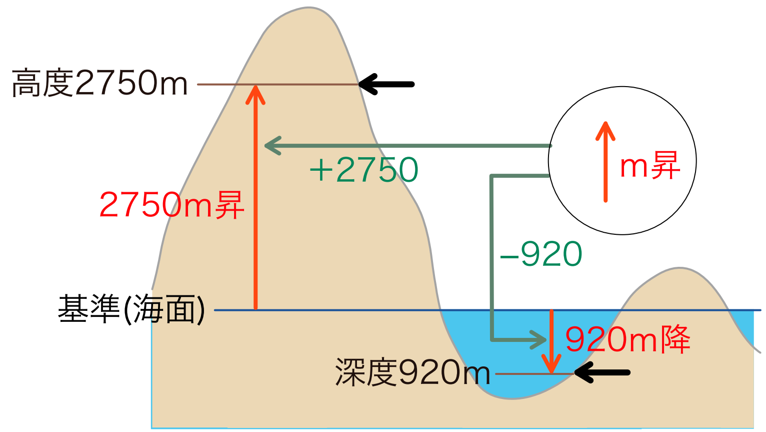


6. よって，位置の表現は「基準から単位の (ー3) 倍」：



応用：時刻 / 年，高さ / 深さ，ビルの階数の表現



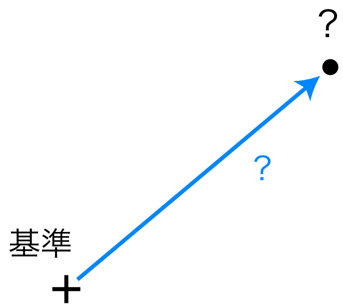


4.3 平面での位置表現と複素数

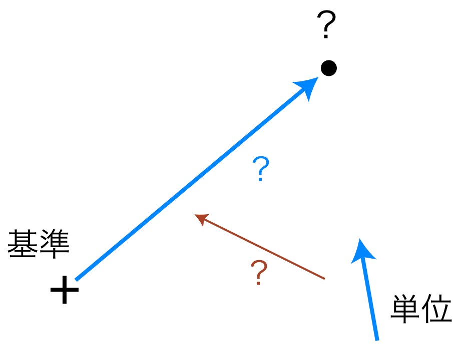
平面上の位置の表現は，直線上の位置の表現とまったく同型で，つぎのようになります。

1. この位置を言い表したい：

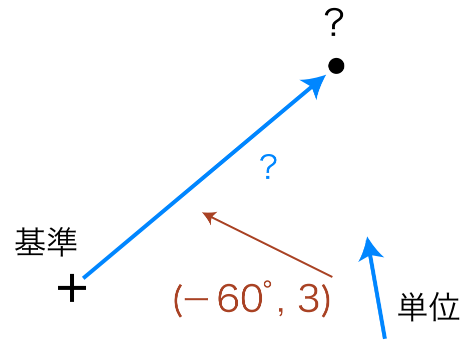
2. 基準をとって，「基準からどれだけ」と言い表そう：



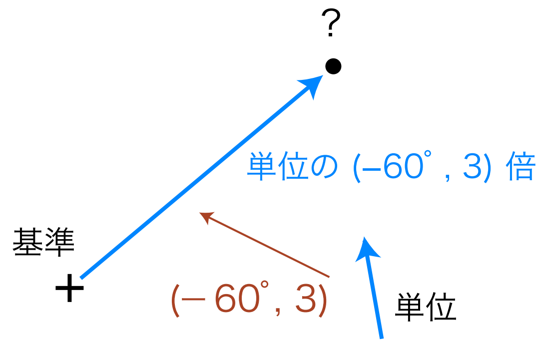
3. 単位をとって，「どれだけ」を「単位の何倍」と言い表そう：



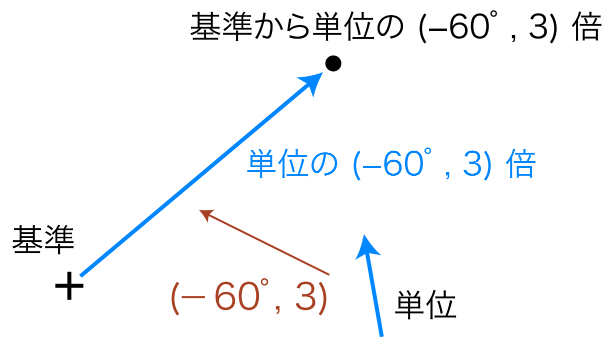
4. 単位の (－60°, 3) 倍だ：



5. よって，「どれだけ」は「単位の (－60°, 3) 倍」：



6. よって，位置の表現は「基準から単位の (－60°, 3) 倍」：



特に，平面上の位置の表現では，複素数が使われることになります。

5.「数直線・数平面」

5.1 分数を半直線上に配置

5.2 正負の数を直線上に配置

5.3 複素数を平面上に配置
(複素平面 / ガウス平面)

5.1 分数を半直線上に配置

分数を半直線上に配置することができます。
すなわち，つぎのような対応をつくることができます：

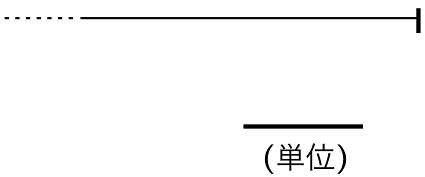
「*任意の数に対し，それに対応する半直線上の一点が決まる。*」

方法は，つぎのようになります：

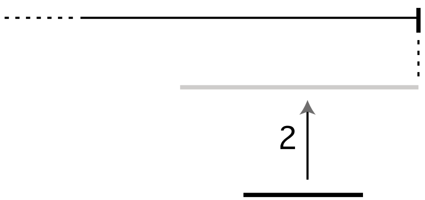
1. 半直線を書く：

2. 端点を「基準」とする：

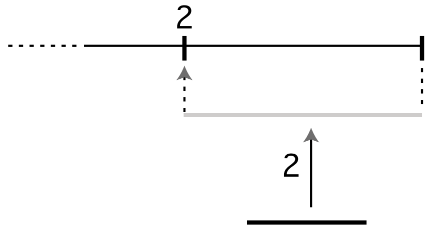
3. 線分を任意の長さに書き，「単位」とする：



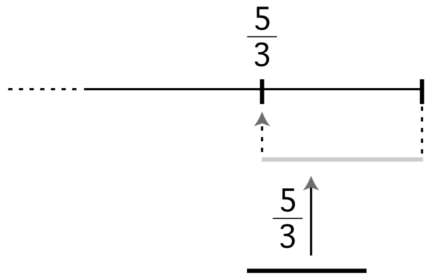
4. 2 に対応する点を求めるとしよう。
単位の２倍の長さの線分をつぎのように置く：



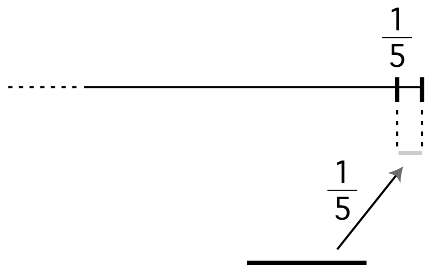
5. そして，つぎのように決まる半直線上の点を，2 に対応する点とする:



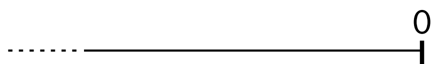
6. 同様に，5/3 に対応する点はつぎのようになる：



7. 基準の点と対応する数はあるか？
数を０に近づけると，対応する点は基準の点に近づく：



8. よって，０に基準の点が対応している：



(０の存在しない数の系では，「基準」のところに来る数はない。)

なおこの対応は，つぎのようになっています：

数ａ，ｂに対応する点をそれぞれＡ，Ｂとするとき
ａ＜ｂ ならば，ＡがＢよりも基準に近い。

5.2 正負の数を直線上に配置

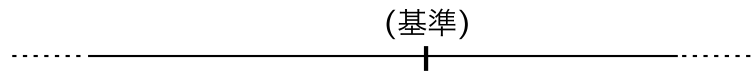
正負の数を直線上に配置することができます。
すなわち，つぎのような対応をつくることができます：

「*任意の数に対し，それに対応する直線上の一点が決まる。*」

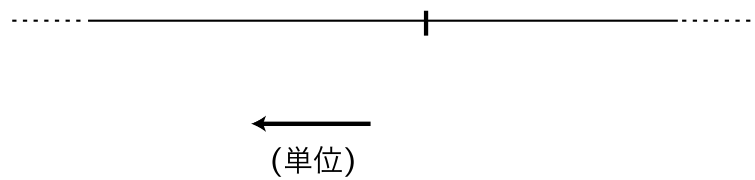
方法は，つぎのようになります：

1. 直線を書く：

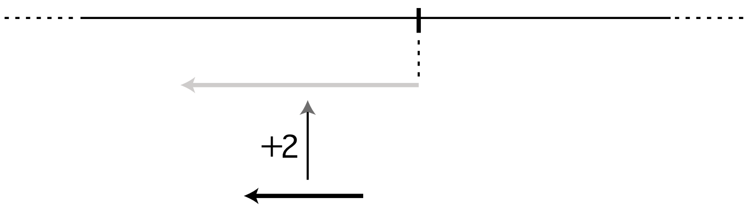
2.「基準」として，任意に一点をとる：



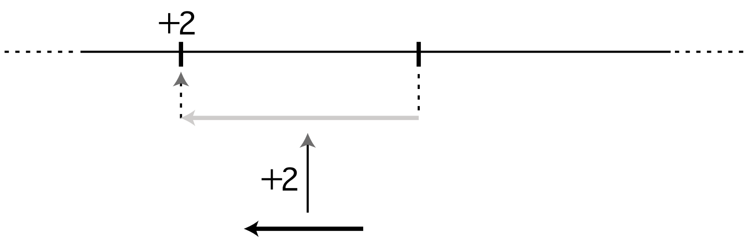
3. 直線と平行に有向線分を任意の長さ任意の方向で書き，「単位」とする：



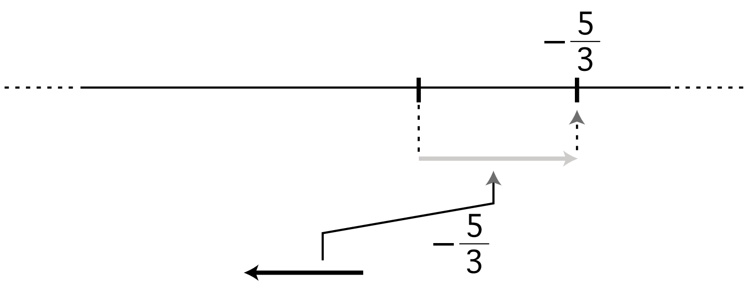
4. ＋２に対応する点を求めるとしよう。
単位の (＋2) 倍の有向線分をつぎのように置く：



5. そして，つぎのように決まる直線上の点を，＋２に対応する点とする：

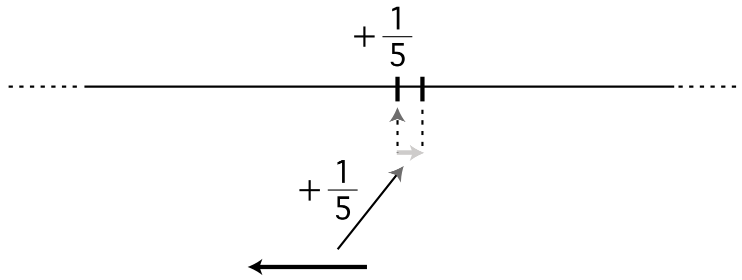


6. 同様に，–５/３ に対応する点はつぎのようになる：

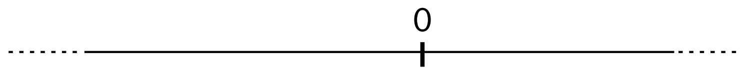


7. 基準の点と対応する数はあるか？

数を０に近づけると，対応する点は基準の点に近づく：



8. よって，０に基準の点が対応している：



なおこの対応は，つぎのようになっています：

数ａ，ｂに対応する点をそれぞれＡ，Ｂとするとき

ａ＜ｂ ならば，Ａから見たＢの方向は単位の向きと同じ。

5.3 複素数を平面上に配置 (複素平面 / ガウス平面)

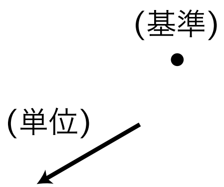
複素数を平面上に配置することができます。
すなわち，つぎのような対応をつくることができます：

　「*任意の数に対し，それに対応する平面上の一点が決まる。*」

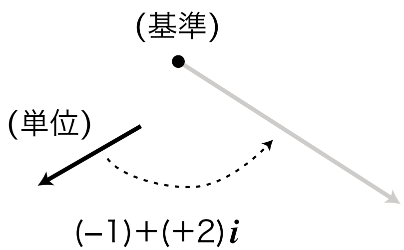
方法は，つぎのようになります：

1. 平面上の任意の一点を，「基準」としてとる：

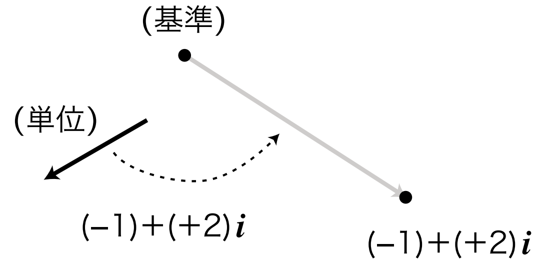
2. 平面上に有向線分を任意の長さ任意の方向で書き，「単位」とする：



3. (– 1) ＋ (＋ 2)i　に対応する点を求めるとしよう。
単位の (– 1) ＋ (＋ 2)i　倍の有向線分を，つぎのように置く：



4. そして，これの先端にある点を，(– 1) ＋ (＋ 2)i　に対応する点とする：



5. 基準の点と対応する数はあるか？
ａ＋ｂｉ　のａ，ｂを０に近づけると, 対応する点は基準の点に近づく。
よって，０に基準の点が対応している：

6.　数の積

6.1 積の意味（記号「×」の文法）

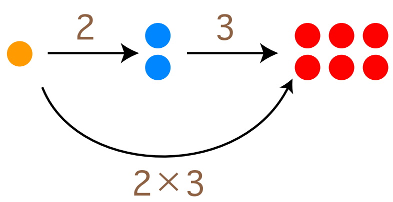
数の積（記号「×」の文法）は，つぎのように決められます：

$$\begin{tikzcd} \text{量}_0 \arrow[r, "\text{数}_1"] \arrow[rr, bend right, "\text{数}_1\times\text{数}_2"'] & \text{量}_1 \arrow[r, "\text{数}_2"] & \text{量}_2 \end{tikzcd}$$

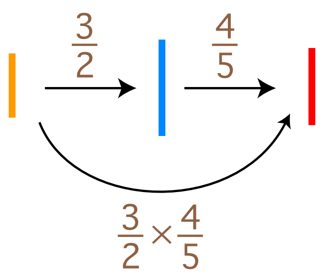
すなわち，「倍の倍，あわせて何倍」（倍の合成）を「数の積」の形に書き表すということです。

数とそれが扱う量が違えば数の積のイメージもつぎのように違ってきますが，形は同じであることを確認してください：

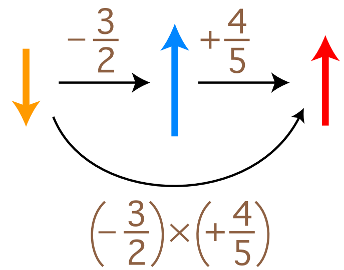
自然数：



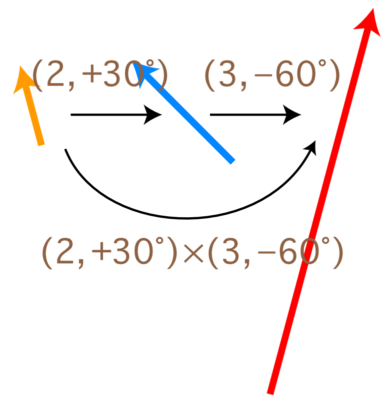
分数：



正負の数：



複素数：



6.2 求積公式

6.2.1 求積公式

数の積は，つぎの形で定義されました：

$$\begin{tikzcd} 量_0 \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_1 \arrow[r, "数_2"] & 量_2 \end{tikzcd}$$

さて，表現「数$_1$ × 数$_2$」に対応する数は，存在するのでしょうか？
実際に求めることができれば問題ないわけですので，求める方法をつぎに考えることになります。

「実際に求めることができる」とは，

数$_1$ と 数$_2$ に対し一定の操作を施して求められる

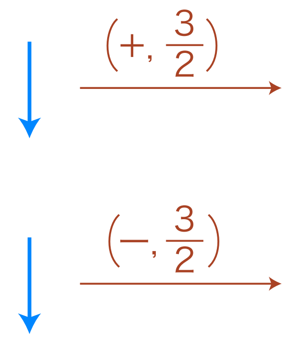
ということです。そして，この操作を述べる式は「求積公式」ということになります。

自然数，分数，正負の数，複素数に対しては，求積公式が立ちます。

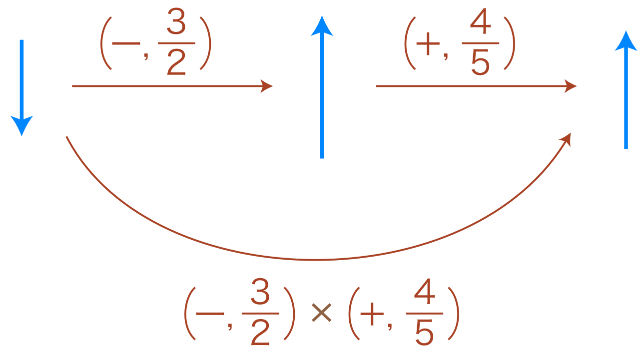
6.2.2 正負の数の場合

正負の数は，＜正逆２方向の向きをもつ量＞の比を表すものとして，つぎの２つのパートで構成されていました：

1. 符号 (向きの変換に関する情報)：同方向なら ＋, 逆方向なら ー。
2. 絶対値 (大きさの変換に関する情報)：大きさの比を既知の数で表す。



いま正負の数の積を，つぎの場合で考えてみましょう：



向きの変換に関しては，最初は反転 (–) でつぎは同方向 (＋) ですから，あわせて反転 (–) になっています。

大きさの変換に関しては，最初は 3/2 倍でつぎは 4/5 倍ですから，あわせて 3/2 × 4/5 倍になっています。

よって：

$$\left(-,\ \frac{3}{2}\right) \times \left(+,\ \frac{4}{5}\right) = \left(-,\ \frac{3}{2}\times\frac{4}{5}\right)$$

これから類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

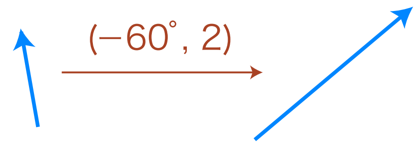
> 正負の数 m，n に対し，
>
> 1. m × n の符号は，
>   - m と n が同符号であるとき ＋
>   - m と n が異符号であるとき −
> 2. | m × n | = | n | × | m |

注意：式 | m × n | = | n | × | m | の左辺の「×」は正負の数の「×」，そして右辺の「×」は正負の数の絶対値の表現に使われている数の「×」です。(両者は別物です！) ——正負の数の絶対値の定義を参照してください (§2.3 比の表現 (数表記のきまり)：正負の数の場合)。

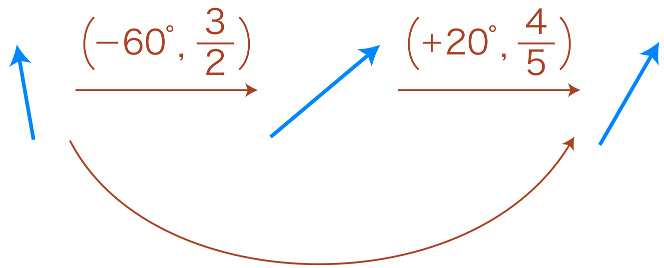
5.2.3 複素数の場合

複素数は，<平面上方向自由な向きと大きさをもつ量>の比を表すものとして，つぎの２つの情報で構成されていました：

1. 向きの変換に関する情報：回転の大きさ (角度)
2. 大きさの変換に関する情報：大きさの比



いま複素数の積を，つぎの場合で考えてみましょう：



$$\left(-60^\circ,\ \frac{3}{2}\right) \times \left(+20^\circ,\ \frac{4}{5}\right)$$

向きの変換に関しては，最初は − 60 ° の回転でつぎは ＋ 20 ° ですから，あわせて ((− 60) ＋ (＋ 20)) ° になっています。

大きさの変換に関しては，最初は 3/2 倍でつぎは 4/5 倍ですから，あわせて 3/2 × 4/5 倍になっています。

よって：

$$\left(-60^\circ,\ \frac{3}{2}\right) \times \left(+20^\circ,\ \frac{4}{5}\right) = \left(((-60)+(+20))^\circ,\ \frac{3}{2}\times\frac{4}{5}\right)$$

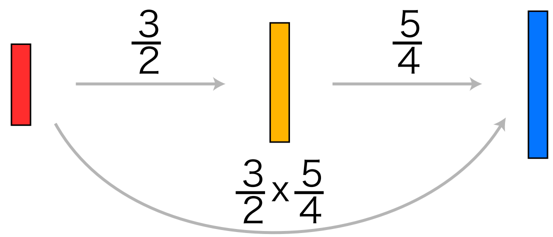
これから類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

1. 向きの変換のパートは，和。
2. 大きさの変換のパートは，積。

5.2.4 分数の場合

分数の求積公式は，正負の数や複素数の場合と比べてずっと複雑です。したがってこのテキストでは，これを正負の数，複素数の後にもってきました。

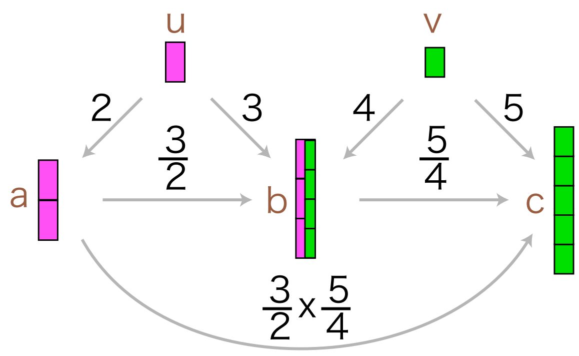
さて，数の積は，倍の合成として定められます。そこで分数の場合，つぎのようになります (倍は，長方形のタテの長さに関する倍)：



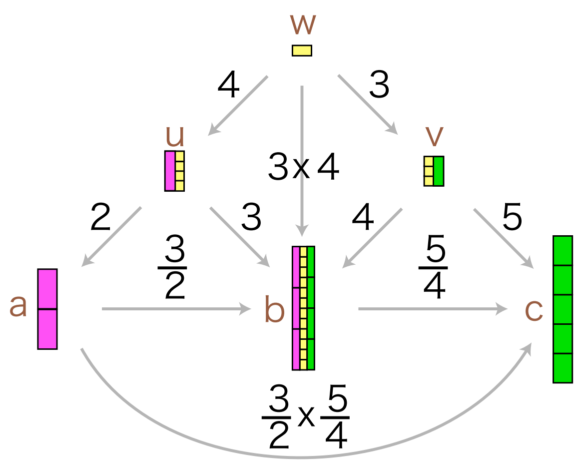
この関係が成り立つようにするには，分数の積をどのように定めたらよいでしょう？

「3/2 × 5/4」が表す分数を求めてみます。

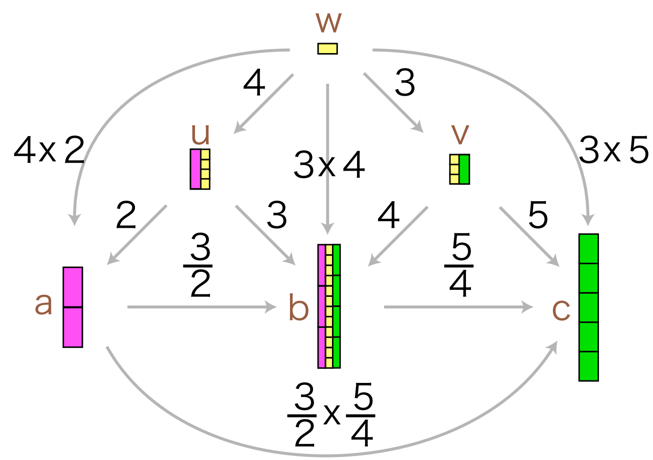
1. 分数 3/2，4/3 の意味により，下図の条件を満たす量 u, v がとれる。



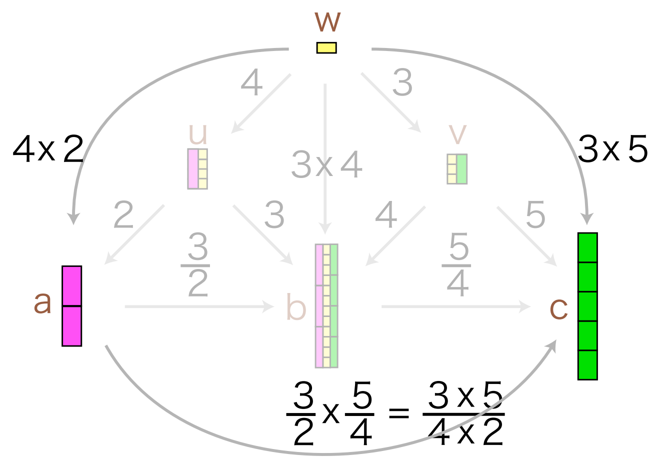
2. u の 3 倍と v の 4 倍が同じであることから，下図の条件を満たす量 w がとれる。



3. a は w の (4 × 2) 倍，c は w の (3 × 5) 倍。
すなわち，a と c は，w によって (4 × 2) : (3 × 5) の比になっている。



4. よって，a に対する c の比は，(3 × 5)/(4 × 2)。

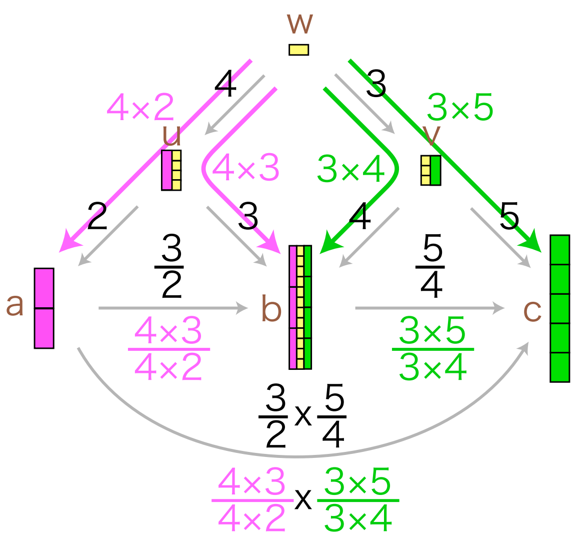


この例から類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

$$\frac{n}{m} \times \frac{q}{p} = \frac{n \times q}{m \times p}$$

通分

量 w は，「u ,v に共通の分割を求める」という方針で求めています。
w を得て，この w から 比 3/2 : a→b，5/4 : b→c を見るとき， 2 つの比はそれぞれ (4×3)/(4×2)，(3×5)/(3×4) になっています。
特に，(3/2)×(5/4) は，(4×3)/(4×2)×(3×5)/(3×4) になります。



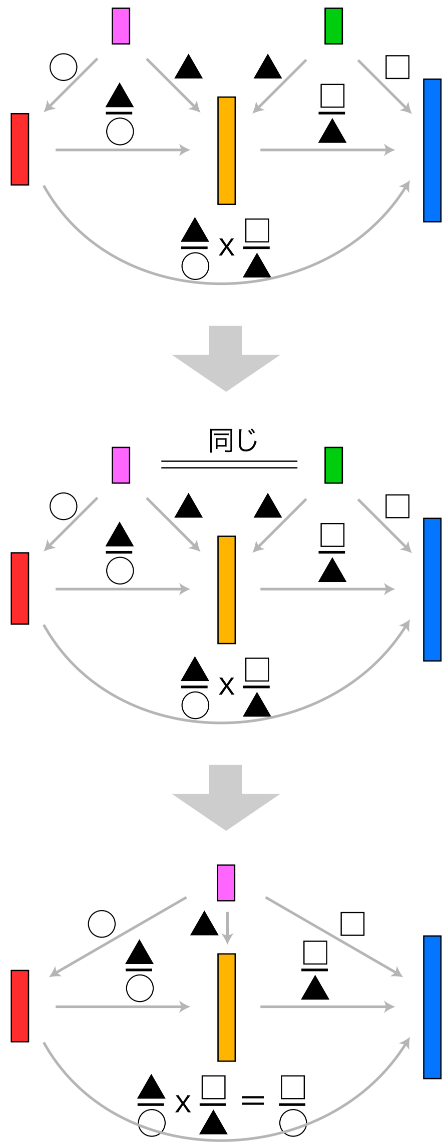
これは何を意味しているでしょう？
「u ,v に共通の分割を求める」は，「3/2 の分子と，5/4 の分母を通分する」に対応しているということです。
つまり，つぎの形をつくっているわけです：

$$\frac{\blacktriangle}{\bigcirc} \times \frac{\square}{\blacktriangle}$$

この形の積の場合，求積公式はつぎのようになります――これが，分数の積の基本形（分数の和における「同分母分数の和」に対応するもの）ということになります：

$$\frac{\blacktriangle}{\bigcirc} \times \frac{\square}{\blacktriangle} = \frac{\square}{\bigcirc}$$

以下が，この求積公式の理由です：



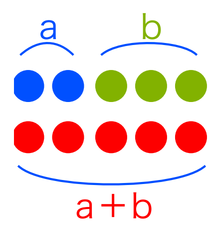
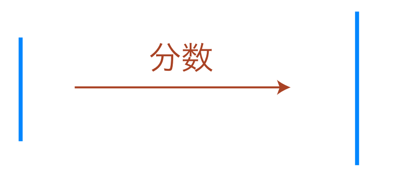
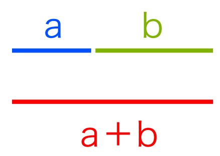
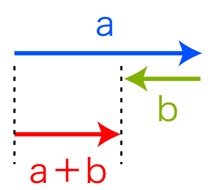
7. 数の和

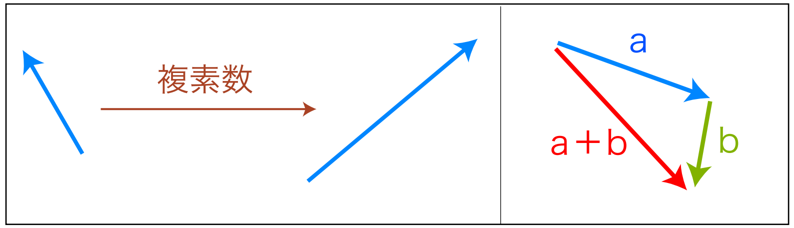
7.1 量の和

量においては，２量の和を考えます。（すなわち，「量」の条件の一つに，「２量に対してその和が定まる」があります。）

量ａと量ｂの和を, 記号「＋」を使って「ａ＋ｂ」で表すことにします。

数とそれが扱う量の違いによって，量の和のイメージもつぎのように違ってきます：

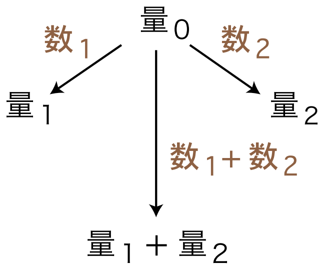
数と「２量の比」のイメージ	量と量の和：量
	
	
	



このすぐ後で，「数の和」と数の和の記号「＋」を導入することになりますが，量の和と数の和，量の＋と数の＋をきちんと区別できることがひじょうに重要になります。 ――この区別は，（このテキストの最大のテーマともいえる）「量と数の区別」の一環です。

7.2 和の意味 (記号「+」の文法)

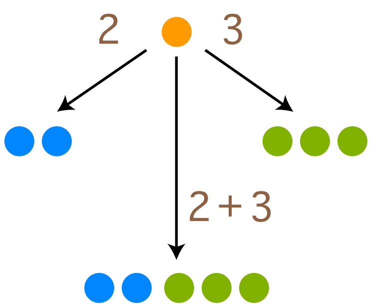
　数の和 (記号「+」の文法) は，つぎのように決められます：



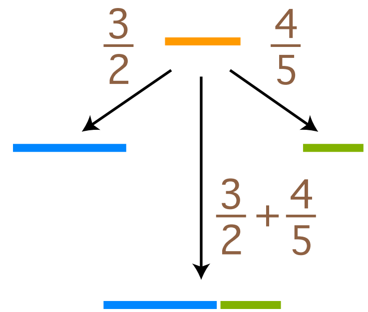
すなわち，「もとの量から２量の和への倍」を「倍の和」ととらえ，そしてこれを「数の和」の形に書き表すということです。

　数とそれが扱う量が違えば数の和のイメージもつぎのように違ってきますが，形は同じであることを確認してください：

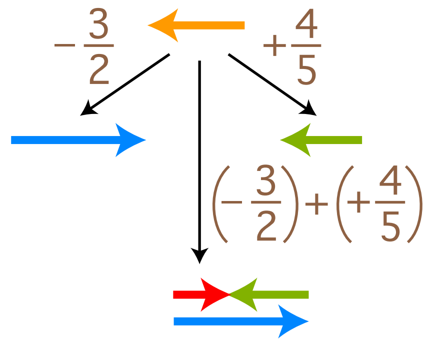
自然数：



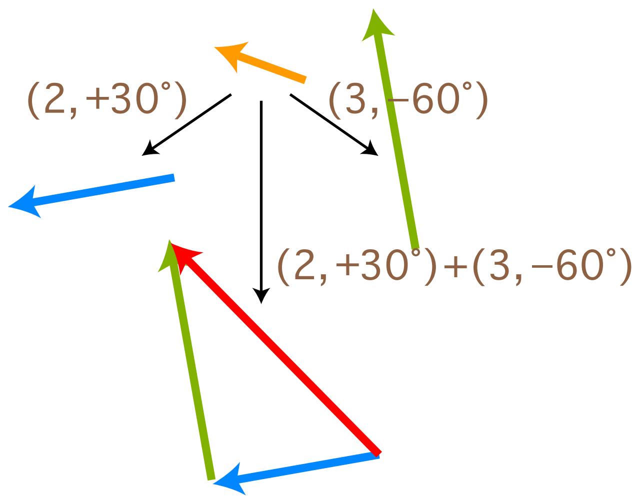
分数：



正負の数：



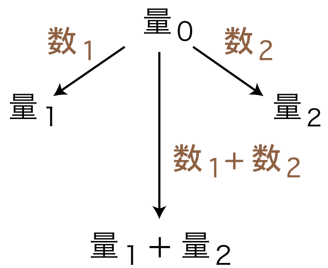
複素数：



7.3　求和公式

7.3.1 求和公式

数の和は，つぎの形で定義されました：



さて, 表現「数 $_1$ ＋ 数 $_2$」に対応する数は, 存在するのでしょうか？実際に求めることができれば問題ないわけですので，求める方法をつぎに考えることになります。

「実際に求めることができる」とは,

数 $_1$ と 数 $_2$ に対し一定の操作を施して求められる

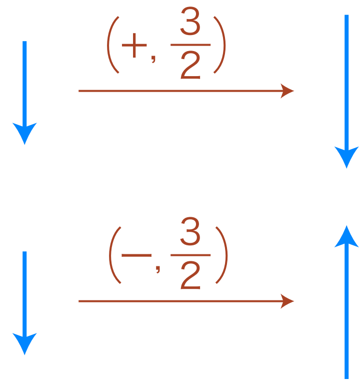
ということです。そして，この操作を述べる式は「求和公式」ということになります。

自然数，分数，正負の数，複素数に対しては，求和公式が立ちます。

7.3.2 正負の数の場合

正負の数は，＜正逆２方向の向きをもつ量＞の比を表すものとして，つぎの２つのパートで構成されていました：

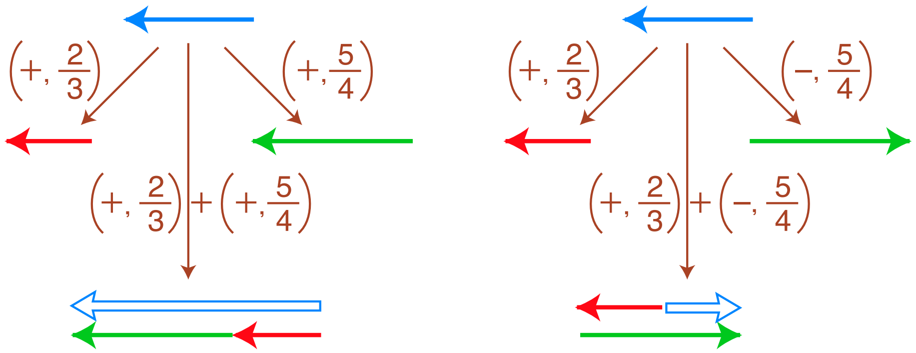
1. 符号 (向きの変換に関する情報)：同方向なら ＋, 逆方向なら ー。
2. 絶対値 (大きさの変換に関する情報)：大きさの比を既知の数で表す。



また，＜正逆２方向の向きをもつ量＞の和は，つぎのように決められました：

注意：図中の「＋」は量の和の「＋」(数の和の「＋」とは別物)

よって，正負の数の和は，同符号と異符号それぞれの場合でつぎのようになります：



そこで，この例から類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

正負の数 m，n に対し，

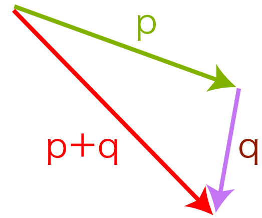
1. m と n が同符号であるとき，
   (1)　m＋n の符号は，m，n と同じ
   (2)　| m＋n | ＝ | m | ＋ | n |
2. m と n が異符号で，| m | ≦ | n | であるとき，
   (1)　m＋n の符号は，n と同じ
   (2)　| m＋n | ＝ | n | − | m |

注意：式 | m＋n | ＝ | m | ＋ | n |，| m＋n | ＝ | n | − | m | の左辺の「＋」は正負の数の「＋」，そして右辺の「＋」「−」は正負の数の絶対値の表現に使われている数の「＋」「−」です。
— 改めて，正負の数の定義を参照してください (比の表現 (数表記のきまり)：正負の数の場合)。

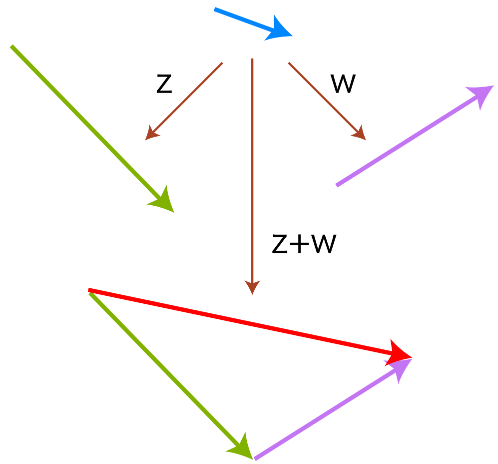
6.3.3　複素数の場合

複素数は，＜平面上方向自由な量＞の比を表します：

また，＜平面上方向自由な量＞の和は，つぎのように決められました：



そこで，複素数の和は，つぎのようになります：



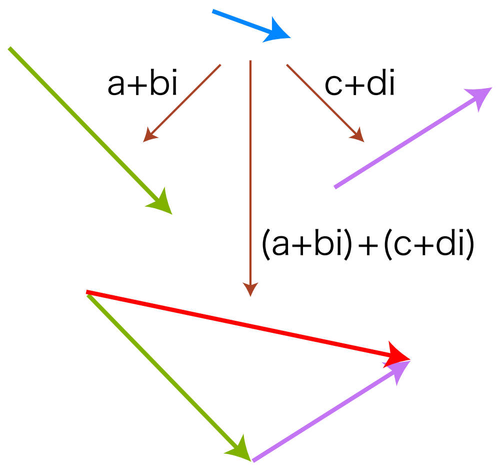
＜平面上方向自由な量＞の比である複素数には，２つの表現方法がありました：

(1) 回転角度 θ と大きさの倍 d の組 (θ, d)

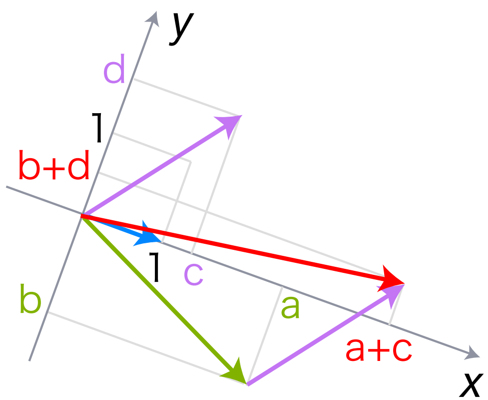
(2) a＋b i

複素数の求積では（θ，d ）の表現が便利ですが (§5.2.3 複素数の求積公式)，求和の場合は a ＋ b i の表現が便利になります。

実際,



とするとき，つぎの関係が成り立ちます：



したがって，つぎが求積公式になります：

(a ＋ b i) ＋ (c ＋ d i) ＝ (a ＋ c) ＋ (b ＋ d) i

注意：上の公式には３種類の「＋」があります：

(1) 複素数の表記の「＋」

(2) 複素数の和の記号「＋」

(3) 複素数の構成に使われた既知の数の和の「＋」

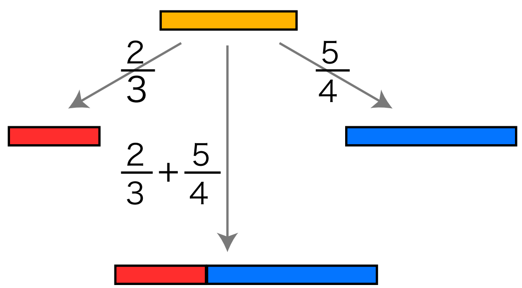
すなわち，つぎのようになります：

(a ＋ b i) ＋ (c ＋ d i) ＝ (a ＋ c) ＋ (b ＋ d) i

7.3.4　分数の場合

　分数の求和公式は，正負の数や複素数の場合と比べると複雑です。したがってこのテキストでは，これを正負の数，複素数の後にもってきました。

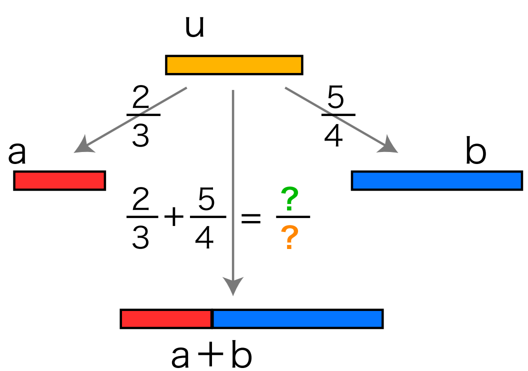
　さて，数の和は 倍の和として定められます。そこで分数の場合，つぎのようになります (倍は，長方形のヨコの長さに関する倍) :



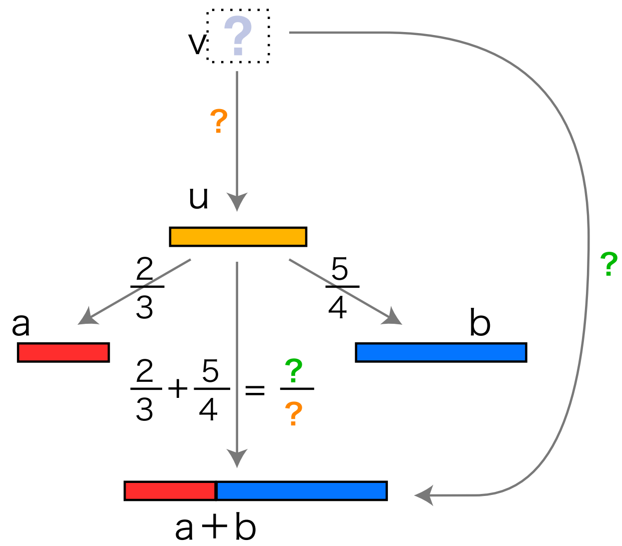
この関係が成り立つようにするには，分数の和をどのように定めたらよいでしょう？

　そこで実際に「2/3 ＋ 5/4」が表す分数を求めてみます。

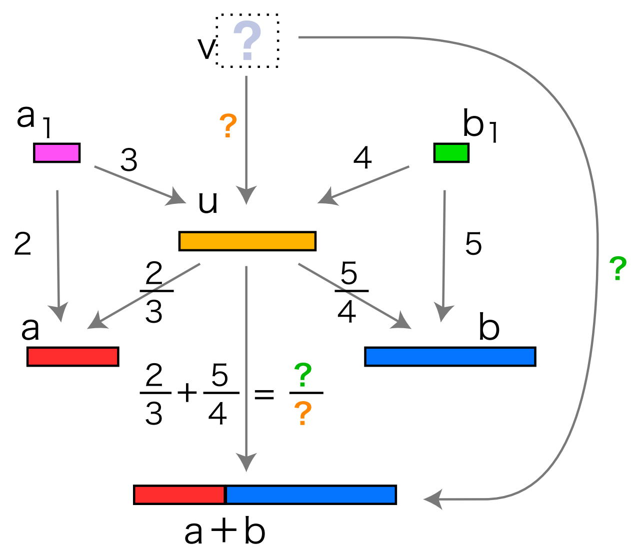
1.「2/3 ＋ 5/4」が表す分数「?/?」を求めるとは，どういうことか？



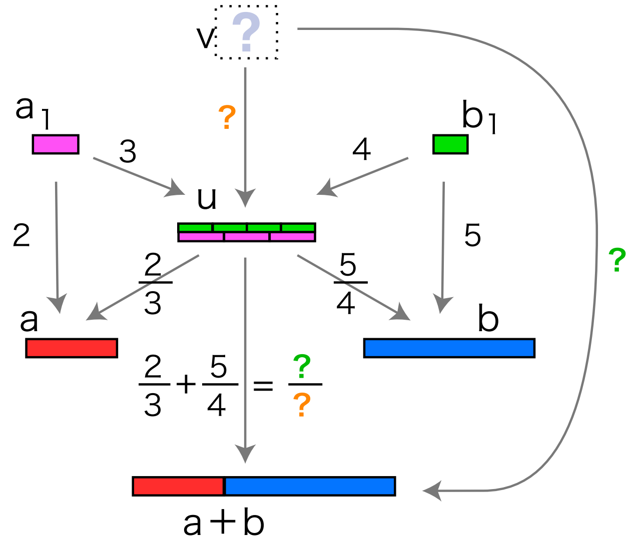
2. それは，つぎのような量 v を求めること：



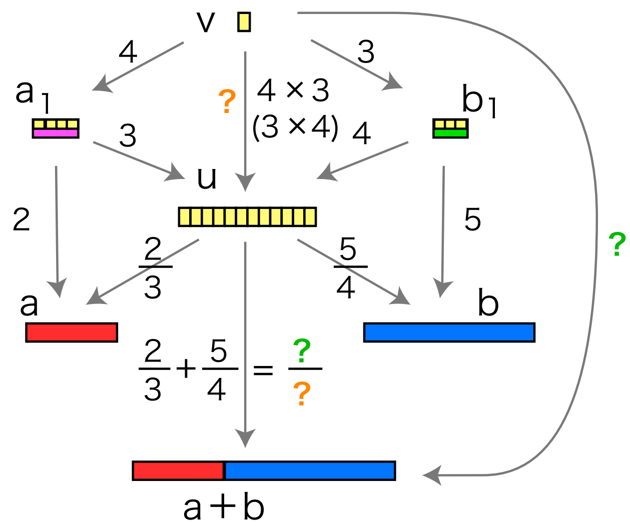
3. 分数 2/3，5/4 の意味により，つぎのような量 a_1，b_1 がとれる：



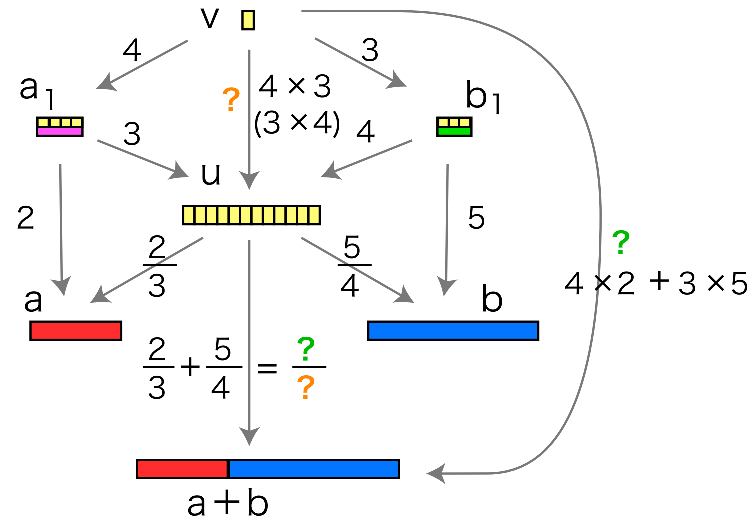
4. a_1 と b_1 を共約する量として v が求まればよい。
—a_1 の 3 倍と b_1 の 4 倍が同じであることが，v を求めるヒント：



5. 4 倍して a_1 になる量と 3 倍して b_1 になる量は，同じ。
これが，a_1 と b_1 を共約する量 v になる。



6. a は v の 4×2 倍，b は v の 3×5 倍。よって，a＋b は v の (4×2＋3×5) 倍。
また，u は v の 3×4 倍。



7. これで，分数「?/?」が求まった：

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{4\times 2+3\times 5}{3\times 4}$$

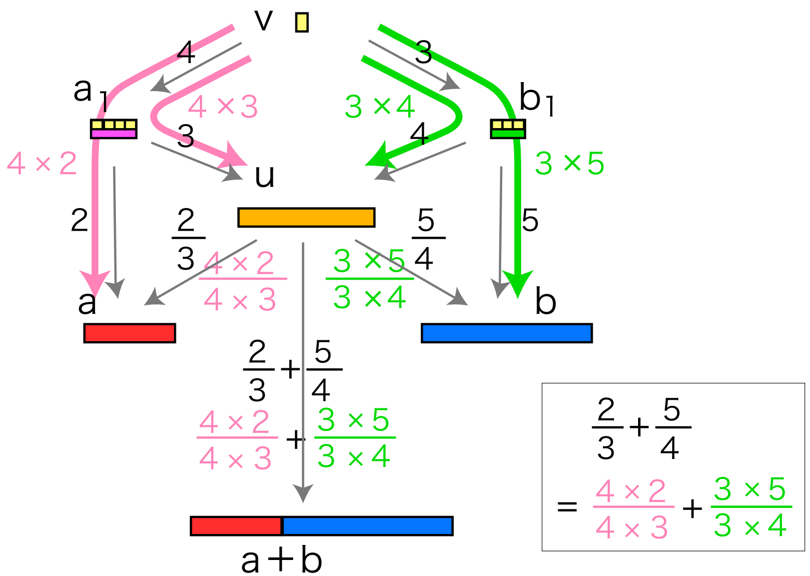
そしてこの例から類推して，求和の公式がつぎのようになることがわかります：

$$\frac{n}{m}+\frac{q}{p}=\frac{n\times p+m\times q}{m\times p}$$

通分

量 v は，「a_1, b_1 に共通の分割を求める」という方針で求めています。
v を得て，この v から 比 2/3：u→a，5/4：u→b を見るとき，2

つの比はそれぞれ (4× 2)/(4× 3), (3× 5)/(3× 4) になっています。
特に, (2/3) + (5/4) は, (4× 2)/(4× 3) + (3× 5)/(3× 4) になります。



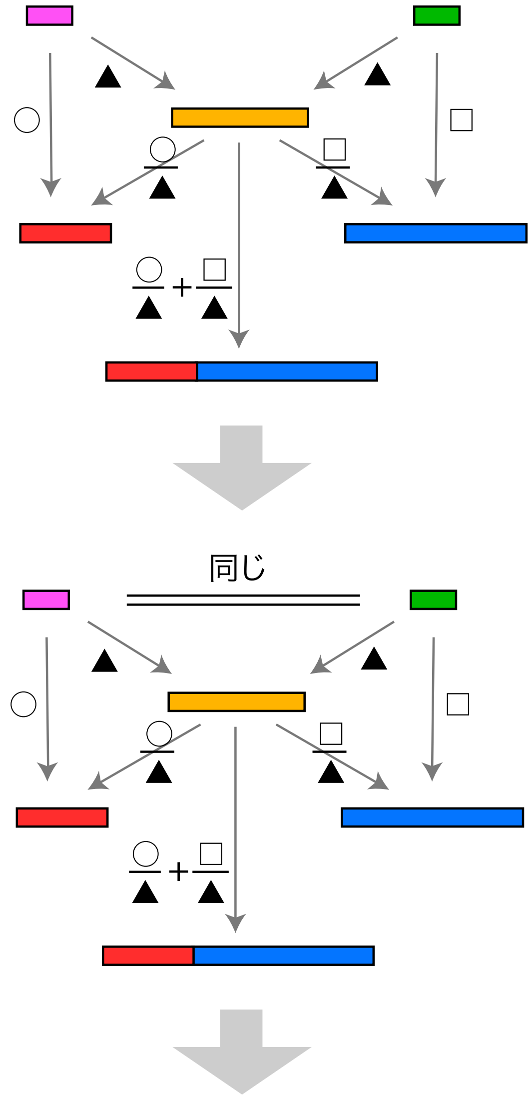
これは何を意味しているでしょう？
「a 1, b 1 に共通の分割を求める」は, 「分数 2/3, 5/4 を通分する」に対応するということです。
つまり, つぎの形をつくっているわけです：

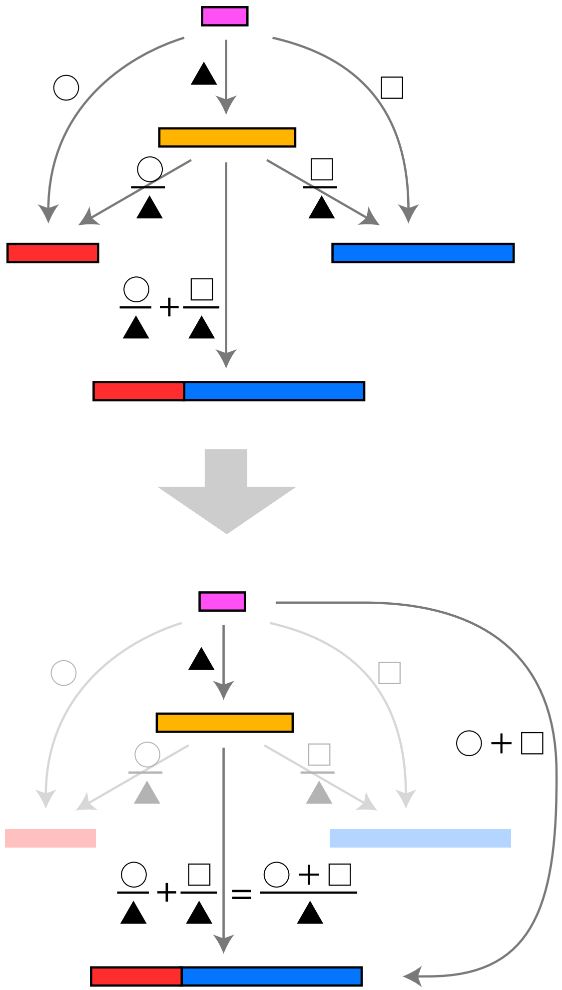
$$\frac{\bigcirc}{\blacktriangle}+\frac{\square}{\blacktriangle}$$

この形の和の場合, 求和公式はつぎのようになります：

$$\frac{\bigcirc}{\blacktriangle}+\frac{\square}{\blacktriangle}=\frac{\bigcirc+\square}{\blacktriangle}$$

以下が, この求和公式の理由です：

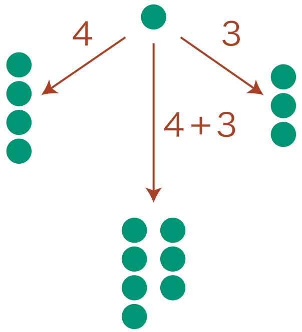




8. 自然数の和と積

8.1 求和アルゴリズム

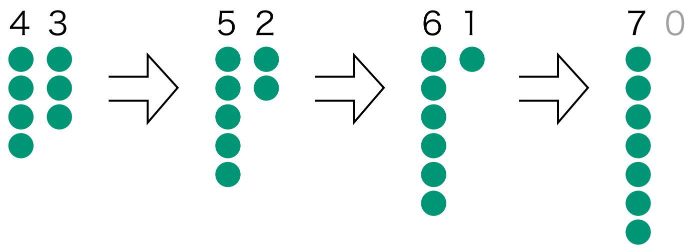
数の和は倍の和として導入されます (§6.2 和の意味)。
そこで，自然数の場合は，つぎのようになります：



さて，上の関係が成り立つようにするには，自然数の和をどのように定めたらよいでしょう？

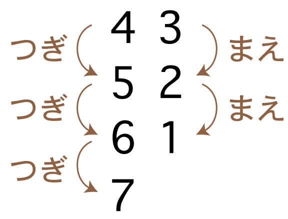
つぎの操作をします：

4 個と 3 個から始めて，一方から他方への一個ずつの移動を，
尽きるまで続ける：



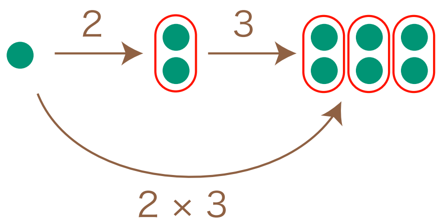
尽きたときのもう一方の側の個数 (7) が，4 + 3 に対応させればよいものになります。

そこで，上の操作の各ステップでの個数の変化を書き留めると，これがそのまま求和の手順（アルゴリズム）になります：



8.2　求積公式

数の積は，倍の合成として導入されます (§5.1　積の意味)。
そこで，自然数の場合は，つぎのようになります：



したがって，つぎが自然数の求積の公式になります：

$$2 \times 3 = \overbrace{(2+2)}^{3} + 2$$

9. 数の商と差

9.1　商の意味 (記号「÷」の文法)

２数 m，n の商「n ÷ m」は,「m と掛けて n になる数」の言い換え (表記) として導入されます。——すなわち, つぎの式を満たす数「?」を「n ÷ m」と書くということです：

$$m \times ? = n$$
$$? \times m = n$$

このように定めてよいのは，この２つの式を満たす「？」が同じになる場合です。

自然数，分数，正負の数，複素数では，積の可換性が成り立ちますので，「？」は同じになります。よって，商「n ÷ m」を導入してよいことになります。

注意：「積の可換性」は四元数になると成立しません。よって「積の可換性」を「数」の条件にはしません。

なお，「n ÷ m を導入できる」ということは,「n ÷ m が存在する」ということとは別問題です。例えば自然数で，「2 ÷ 3」は意味（「２と掛けて３になる数」）を持ちますが，これで表される自然数は存在しません。

比較：「体長 100m の魚」は，それが存在するかどうかと関係なく，ことばとして意味をもちます。

「商」の意味 (記号「÷」の文法) は，以上述べたことですべてです。

特に，「÷」には「分ける」といった力仕事の意味はありません。(分数や複素数の場合を考えれば，このことは簡単に了解されるでしょう。)

「÷」に対して「分ける」を意味として感じてしまうのは，小学算数のところで「分ける問題に対して商の式を立てる」が訓練され，その中で道具（数，商の式）とそれの応用対象（分ける問題）を混同する習慣をつけられてしまったからです。

9.2　差の意味 (記号「–」の文法)

２数ｍ，ｎの差「ｎ－ｍ」は,「ｍと足してｎになる数」の言い換え (表記) として導入されます。——すなわち, つぎの式を満たす数「?」を「ｎ－ｍ」と書くということです：

$$m + ? = n$$
$$? + m = n$$

例えば,「３－２」は「２と足して３になる数」,「(３－２) － 5」は「5と足して (２と足して３になる数) になる数」です。

量については「和の可換性」を条件にします。このことから数の和も可換となります。したがって,「ｎ－ｍ」を上のように定めることができます（すなわち, 上の２つの式を満たす「？」が同じになります)。

なお,「ｎ－ｍ を導入できる」ということは ,「ｎ－ｍ が存在する」ということとは別問題です。例えば自然数で,「2 － 3」は意味 (「２と足して３になる数」) を持ちますが, これで表される自然数は存在しません。

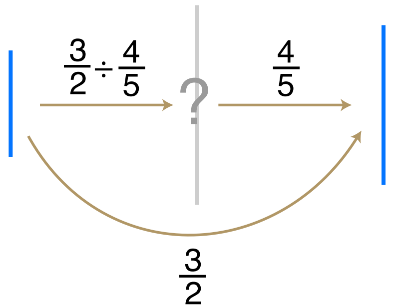
「差」の意味 (記号「－」の文法) は, 以上述べたことですべてです。特に,「－」には「引く / 取り去る / 除く」といった力仕事の意味はありません。(正負の数や複素数の場合を考えれば, このことは簡単に了解されるでしょう。)
「－」に対して「引く / 取り去る / 除く」を意味として感じてしまうのは, 小学算数のところで「引く / 取り去る / 除く問題に対して差の式を立てる」が訓練され, その中で道具 (数, 差の式) とそれの応用対象 (引く / 取り去る / 除く問題) を混同する習慣をつけられてしまったからです。

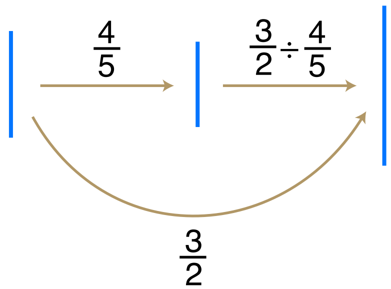
9.3 分数の求商公式

例として，3/2 ÷ 4/5 を考えましょう。

商の定義（記号「÷」の文法）より，この式の意味はつぎのようになります：

$$「\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}」\text{の意味：}「\frac{4}{5}\text{と掛けて}\frac{3}{2}\text{になる数}」$$

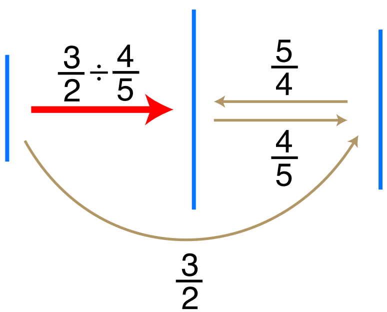




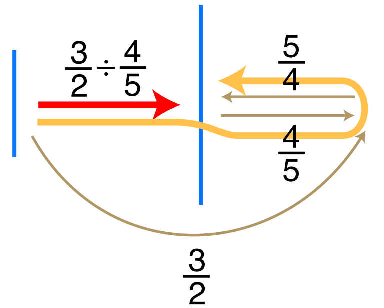
そしてこの２つの図のそれぞれから，つぎの等式変形が導かれます。

左図からは：

$$\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}$$

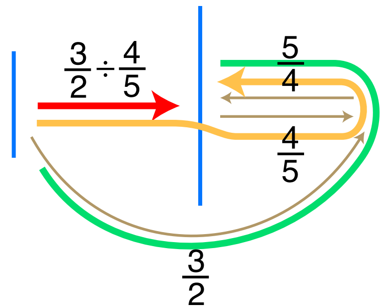


$$=\left(\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}\right)$$



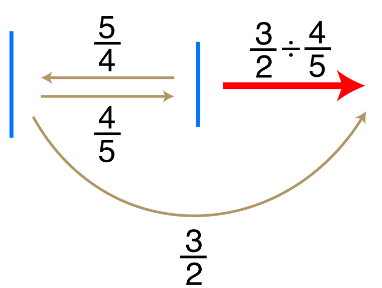
$$=\left(\left(\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}\right)\times\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{4}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}$$

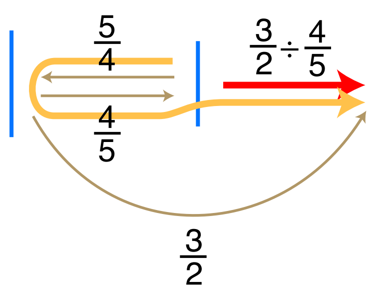


右図からは：

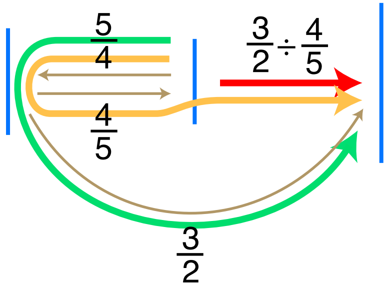
$$\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}$$



$$=\left(\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}\right)$$



$$= \frac{5}{4}\times\left(\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}\right)\right)$$
$$= \frac{5}{4}\times\frac{3}{2}$$



そしてこれより，つぎが分数の求商公式になります：

$$\frac{n}{m}\div\frac{q}{p} = \frac{n}{m}\times\frac{p}{q}$$

9.4　正負の数における 3 種類の「–」の区別

正負の数の学習では，3 種類の「–」と出会うことになります：

負符号　　(− , 3/2)　　(§2.3 正負の数の表記のきまり)

差の記号　(− , 3/2) – (+ , 4/5)　(§8.2 記号「–」の文法)

対称化記号　− (− , 3/2) ＝ (+ , 3/2)

対称化記号の「–」とは， 0 をもつ数において，つぎのように定義されるところのものです：

「数 n と足して 0 になる数を – n と書く。」

例：(− , 3/2) と足して 0 になるのは (+ , 3/2) ですから， − (− , 3/2) ＝ (+ , 3/2) となります。

確認：つぎの式に現れる「–」は，左から順に，差の記号，対象化記号，負符合です：

(+ , 4/5) − (− (− , 3/2))

10.　量とは？

10.1　数が量をつくる

数にいろいろな種類があるのは，扱いたい量についての要求が高くなるのに応じて，それを料理できる数をつくってきた結果です。
しかし，このように言うと，「数は人為的で，量は人為以前」のように受け取られかも知れません。
事実はどうなのでしょう？

量も人為です。
すなわち，「ことばが＜世界＞を構成する」と同じ意味合いで，わたしたちは数を通して量を構成しています。

実際，ちょっと反省してみれば気づくように，長さ，重さ，速さ，時間といったものは，それ自体では存在していません。わたしたちが，あるモノ・コトに対して，長さ，重さ，速さ，時間といったものを読み取っているわけです。

そして，その読み方を与えているのが，数です。
「数は, 量を処理する道具である以前に, 量を対象として興すものである」というわけです。

実際, 数学の「量」は形式であり, 数を素材にしてこの形式をつくります。以下この方法を示しますが，内容はきわめて専門的になります。すなわち，数学のことばでは「普遍対象」の話になります。くるしい人は，とばしてかまいません。(この内容については，つぎのテクストにあたってください：『「量」の数学』)

先ず，形式としての「量」が，数の系 (N, +, x) に対するつぎの系として定義されます：

$$((\,N\,,\,+\,), \times, (\,N\,,\,+\,, \times))$$

そして，「量」は，これと同型な系

$$((\,Q\,,\,\boldsymbol{+}\,), \boldsymbol{\times}, (\,N\,,\,+\,, \times))$$

のことになります。――同型対応　f ：Q ―→ N の条件は，つぎのようになります：

1. 1 対 1 対応
2. $f(x \boldsymbol{+} y) = f(x) + f(y)$
3. $f(x \boldsymbol{\times} n) = f(x) \times n$

ちなみに，算数科の教師用語に「1 と見る / 1 あたり量」というのがありますが，この用語を定義するとしたら，つぎのようになります：

> Qの要素 a に対し，f (a) = 1 となる同型　f ：Q ―→ N を立てることを，「a を 1 と見る / 1 あたり量 a」という。

10.2 「数と量」のカテゴリー

ここで,「数と量」のカテゴリーがどのようであるかを押さえておきます。数学をある程度専門的にやったことのない人には，意味不明の内容になってしまいますが，ここでこれを理解しようとする必要はありません。「数・量のカテゴリーは一通りでない」ということを見ておいてください。

(この内容については，つぎのテクストにあたってください：『「量」の数学』)

数学では，量をつぎのカテゴリー区分でそれぞれ対象化していることになります：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ			
	大きさと１次元方向			
	大きさと２次元方向			
	⋮			

例えば，「一皿２つのリンゴが３皿」は，「離散―大きさ」のカテゴリーでやっていることになります。

ただし，このうち「意味のあるカテゴリー」として実際に対象化しているのは，つぎのものです：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	○	○	○
	大きさと１次元方向	○	○	○
	大きさと２次元方向			○
	大きさと４次元方向			○
	⋮			⋮

このカテゴリーを実現するものは，数 (系) です。

複数のカテゴリーがありますので，複数の数 (系) が必要になります。

これをつぎのようにつくっていきます――矢線の意味は「導出・拡張」です：

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然数}(\mathbb{N},+,\times) \arrow[d] & & \\
\text{整数}(\mathbb{Z},+,\times) \arrow[r] & \text{有理数}(\mathbb{Q},+,\times) \arrow[r] & \text{実数}(\mathbb{R},+,\times) \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
& & \text{複素数}(\mathbb{C},+,\times) \arrow[d] \\
& & \text{四元数}(\mathbb{H},+,\times)
\end{tikzcd}
$$

そして所期の量形式を，つぎのようにつくります (→ § 数が量をつくる)：

10. 量とは？

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$	$((\mathbb{Q}^{+},+),\times,(\mathbb{Q}^{+},+,\times))$	$((\mathbb{R}^{+},+),\times,(\mathbb{R}^{+},+,\times))$
	大きさと１次元方向	$((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$	$((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$	$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$
	⋮			⋮

そして以降，「数」を「量の比」として使っていくことになります。

上の表から特に「比」の部分を取り出したのが，つぎの表です―― これは，＜量のカテゴリー＞と＜比として使われる数 (系) ＞の対応を示す表になります：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$(\mathbb{N},+,\times)$	$(\mathbb{Q}^{+},+,\times)$	$(\mathbb{R}^{+},+,\times)$
	大きさと１次元方向	$(\mathbb{Z},+,\times)$	$(\mathbb{Q},+,\times)$	$(\mathbb{R},+,\times)$
	大きさと２次元方向			$(\mathbb{C},+,\times)$
	大きさと４次元方向			$(\mathbb{H},+,\times)$
	⋮			⋮

(四元数については，つぎのテクストにあたってください：『四元数』)

11.　おわりに

―― これ以降の勉強の方向

本テキストは，数の意味が「量の比」であることを読者に理解してもらう目的で書いています。したがって，これの理解にとって「雑音」になることをできるだけ排除するように書きました。特に，論理の厳格性の点で「適当に逃げて」いるところもあります。(それでもけっこうな長さのテキストになっていますが。)

本テキストでは，量を扱うために人が数をつくったと述べています。しかし，数をつくった当人がこの意識で数をつくったかどうかは，別問題です。数の成り立ちは，個別的に数学史の内容になります。

本テキストでは数はひとのつくった道具，すなわち人為ですが，数を人為以前の存在として考える立場が一方にあります。この場合 ,「人は数を発見するに過ぎない」ということになります。この考え方は，イデア論を源にもつ西洋哲学ではいまでもむしろ主流かも知れません (「実在論」と呼ばれます)。

本テキストでは，「数」の意味を「自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥に通底する形式」として述べています。このとき，この形式の内容に直接関係しないものを「雑音」として捨てているわけですが，この捨てられたものの一つに自然数の話があります。

数は，既存の数を素材にしてつくられます。したがって，数の構成を遡れば，どこかで「ゼロからの数の構築」がなければなりません。これが自然数の場合です。

よって, 自然数の話は,「ゼロからの数の構築」の内容が主になります。さらに，自然数特有の用途が，内容に加わります。

これらの内容については,『「数」がわかる本 数学編 (1) —いろいろな数がつくられるしくみ』(http://m-ac.jp/me/subjects/number/number_make/) にあたってください。

数学では,「数の構築」の主題で，自然数，整数，有理数，実数，複素数，‥‥ の構築を論じます。ここには，量は現れません。

「量」は, 数の意味論が必要とするものです。 結果を先取りすれば,「量」無しで (意味抜きで) 数を構成できます。——数学の方法論にはひとつに「純粋形式言語たらん」というのがあり，「数の構築」はこの立場で論述されます。

ただしこのときには，構築している当のものがどんな資格 / 条件から「数」と呼ばれるのかは，述べられません。「それを考えるのは読者の仕事」ということになってしまうわけです。

読者は，このことを念頭においた上で，数学の「数の構築」が実際どんなふうになっているか，一度見てみるとよいでしょう。

また，数学専門課程の学生ならば，この「数の構築」を学習することで，数学の基礎である「論理・集合」の基本的な考え / 手法を勉強することができます。

宮 下 英 明（みやした ひであき）

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための

「数」がわかる本 数学編 (3)

いろいろな数が「数」であること

2007-06-02　初版アップロード (サーバー：m.iwa.hokkyodai.ac.jp)
2007-07-28　更新
2010-05-28　サーバー変更 (m-ac.jp)
2010-12-06　追加更新
2011-01-11　タイトル変更

著者・サーバ運営　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp