図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「数」がわかる本 シリーズ

数学編 (5)

量計算の論理

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」がわかる本 数学編 (5)

量計算の論理

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『「量」の数学」』を PDF 文書の形に改めたものです。

序

本書は，「数がわかる本」シリーズの第 7 です。

「数がわかる本」シリーズは，ここまでつぎのように続いています：

『いろいろな数がつくられるしくみ』
『いろいろな数が「数」であること』
『四元数』
『数学は「数は量の比」，学校数学は「数は量の抽象」
　— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』
『「かけ算の順序」の数学』
『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』

『いろいろな数がつくられるしくみ』では，

自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数

と流れる「数の構築」を扱いました。

これらが「数」であるという意味は，これらが「数」の形式をもっているということです。『いろいろな数が「数」であること』では，この「数」の形式を，自然数･分数･正負の数･複素数を横断する形で，示しました。

「数」の構築は，既存の数の系を拡張するように行われます。そして数の拡張を行うたびごとに，「数」の既存の概念で通用しなくところが現れてきます。このとき「数」の概念の再調整が必要になります。このことを改めて確認しようという趣旨から，シリーズに『四元数』を加えました。実際，四元数までいくと，「積の可換性」が「数」の条件でなくなります。

ところで，学校数学の「数」は数学になっていません。このことを述べるために，『数学は「数は量の比」，学校数学は「数は量の抽象」— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』を作成しました。

また同様の趣旨で，『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』を作成しました。

『「かけ算の順序」の数学』は，「かけ算の順序」の議論が盛んである反面，それらが数学の内容であることを押さえないものになっているのを見て，作成しました。

以上の書では，それぞれその作成趣旨に応じて必要なだけ「量の数学」を示してきました。そこでこの度は，「量の数学」をまとめて示すことにしました。
併せて，『いろいろな数がつくられるしくみ』からこれの後半部分になっていた量の論を切り離し，これを本書『「量」の数学』と目下準備中の『量と線型空間の近さと違い』『学校数学はmを「1 m」と言わせる』において再編集することにしました。この結果，『いろいろな数がつくられるしくみ』は，自然数から複素数までの数の構築を扱ってそれで終了する内容にスリム化しました。

なお，本書は，『いろいろな数がつくられるしくみ』『いろいろな数が「数」であること』の両方に読者が最初に目を通すことを，想定しています。

目次

はじめに――本書の趣旨 2

1「量」の数学 5
1.1「数」の意味 …… 6
1.1.1　数は量の比 …… 7
1.2　数学の「量」 …… 8
1.2.1　量は形式 …… 9
1.2.2　数を素材にして，量の普遍対象をつくる …… 10
1.2.3　量であるとは，量の普遍対象と同型であること …… 13
1.3「量」の含意 …… 14
1.3.1「量測定」――量が数に対して１次元であること …… 15
1.3.2　数の和は「倍の和」 …… 16
1.3.3　数の積は「倍の倍」 …… 18

2　比例関係 21
2.1　比例関係 …… 23
2.1.1　比例関係への抽象 …… 24
2.1.2「比例関係」の定義 …… 26
2.1.3　分数値の場合 …… 29
2.1.4　比例定数 …… 32
2.2　比例関係に対する量の見方 …… 35
2.2.1「速さ」の場合 …… 36
2.2.2　比例関係は量になる …… 37

3　量計算 41
3.1「量計算」の意味 …… 43
3.1.1　問題の還元：数値の和 / 積へ …… 44
3.1.2　量計算の公式の意味 …… 45
3.2　＜量の倍＞の計算 (→ 倍の合成) …… 48
3.2.1　＜量の倍＞の問題の３タイプ …… 49
3.2.2　推論：積 / 商の数式への還元 …… 50
3.2.3　＜倍の合成＞の形式を抽出しにくい文章題 …… 52
3.3　比例関係の問題解決 …… 54
3.3.0　要旨 …… 55
3.3.1　問題の３タイプ …… 56
3.3.2　例：速さの問題解決 …… 57
3.4　長方形の面積計算，直方体の体積計算 …… 64
3.4.1　長方形の面積計算 …… 65
3.4.2　直方体の体積計算 …… 70
3.5　単位の換算 …… 75
3.5.1　単位換算の推論プロセス …… 76
3.5.2　比例関係と単位換算が合わさった問題 …… 78
3.6　割り算が立式される問題のいろいろ (「6÷３」の場合) …… 81
3.6.1「6÷３」の立式に至る問題の最終還元形 …… 82
3.6.2「6ｍ のひもを３本に等分すると，１本何ｍ？」 …… 83
3.6.3「6ｍ のひもを何本に等分すると，１本３ｍ？」 …… 84
3.6.4「１ヤードは３フィート，6フィートは何ヤード？」 …… 85
3.6.5「面積6cm2，タテ３cm の長方形のヨコは何 cm ？」 …… 86
3.6.6「３km/h の移動で6km 進むのに要する時間は？」 …… 88

4　位 91
4.1　位の表現 …… 93
4.1.0　要旨 …… 94
4.1.1　位の表現――存在の３態：位・量・数 …… 95
4.1.2　直線上の位置の表現――正負の数の使用 …… 100
4.1.3　平面上の位置の表現――複素数の使用 …… 103
4.2　位の構造 …… 106
4.2.1　位の構造―― 位の普遍対象 …… 107
4.2.2　位の算法 …… 108

4.3　位計算 109
4.3.1「西暦 1999 年の 3 年後は ?」 110
4.3.2「水深 200m から 100m 降下は，水深何m ?」 112

おわりに 114

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに――本テクストについて

本テクストは，『いろいろな数がつくられるしくみ』と『いろいろな数が「数」であること』に続くものです。

『いろいろな数がつくられるしくみ』と『いろいろな数が「数」であること』では，「数」の意味を押さえました。数は，量表現・量計算のためにつくられるものであって，「量の比」の表現としてつくられます。
そして本テクストで，量表現・量計算における数の使用がどのようであるかを押さえます。数の使用を押さえるとは，これの論理 / 数学を押さえるということです。

本テクストは，つぎの４章で構成されます：

「量」の数学
比例関係
量計算
位

「「量」の数学」の章では，特に，数学の「量」が形式であることを解説します。
初学者にとっては，この内容が本テクストでいちばんが難しいものになるかも知れません。この内容は，一度に理解しようとしなくてよい。わからなくても一通り目を通しておくことが，ここで大事なことです。
なぜなら，数学の「量」の意識が無いと，思いつきで「量」を語ることになるからです。自分がいちばん正しい考えをしているような気になって，論争を始めるからです。論争は悪いことではありませんが，問題はこれが＜数学に無知 / 無関心＞のレベルの論争だということです。「量」の素人談義は，簡単にこうなってしまいます。

「比例関係」と「量計算」の章は，比例関係および量計算の数学をきちんと示そうとするものです。
初学者は，学校数学の「比例関係」と「量計算」を数学だと思ってきています。よって，軽い「カルチャー・ショック」のようなものを受けるかも知れません。しかし，数学に出会うとはこういうことです。専門数学に入門する者が必ず通る道です。

正負の数，複素数は，量に加え，「位 (位置)」を扱うものになります。
すなわち数が，位の表現，位の計算に用いられるものになります。
このことを「位」の章で解説します。

1「量」の数学

1.1「数」の意味
1.2　数学の「量」
1.3「量」の含意

1.1「数」の意味

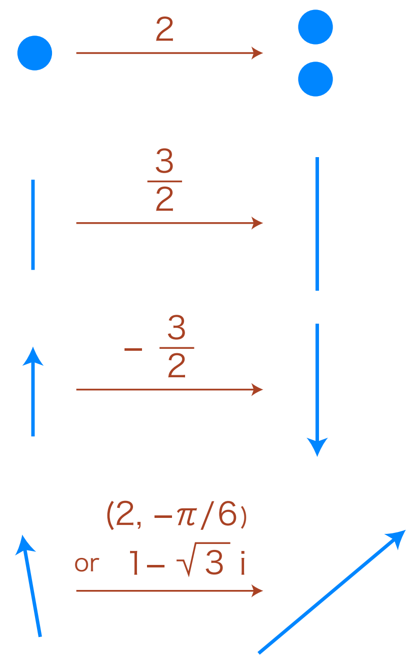
1.1.1　数は量の比

1.1.1　数は量の比

数学の「数」には，自然数，整数，有理数，実数，複素数，四元数，‥‥ といったものがあります。
これらは，それぞれ「数」の意味の実現です。

「数」の意味は，「量の比」です。
これらは，それぞれ「量の比」の実現であり，このことによって「数」であるわけです。

自然数，整数，有理数，‥‥というふうにいろいろな数があるとは，いろいろなタイプの量が対象化されており，いろいろな「量の比」があるということです：



1.2　数学の「量」

1.2.1　量は形式
1.2.2　数を素材にして，量の普遍対象をつくる
1.2.3　量であるとは，量の普遍対象と同型であること

1.2.1　量は形式

数は量の比です。——数学では「数は量の比」となります。

「数は量の比」と言うと，数以前に量があるように見えます。しかし，数学の量は形式であって，数を素材にしてこれを構成し定義します。そして，この形式に同型な対象を「量」と呼びます。

数学は (量形式の他には) 量を明示的に構成することはしません。
数学は形式の学であり，量が数学の対象になるときも形式です。

生活の中で使っている「時間」が量であるとは，《「時間」が量形式に同型なものとして扱われている》ということです。

1.2.2　数を素材にして，量の普遍対象をつくる

形というものを，どのように定義するか？
数学では，つぎの２通りで，形を定義します：

A.「対象Ｘがつぎの条件を満たすとき，Ｘは○○であるという。」
B.「対象Ｘが対象Ｕと同型であるとき，Ｘは○○であるという。」

A は，形を直接表現しています。
B は，形を「ある対象Ｕの形」の言い方で表現しています。

Ｂの場合，「対象Ｕ」を先に定義しておくことになります。そして数学では，このときの「対象Ｕ」の在り方を「○○の普遍対象」と呼んでいます。

数学の「量」の定義は，Ｂのようになります。
すなわち，「量の普遍対象」を定義して，これに同型な系を「量」と定めます。
このときの「量」のリアリティについては，数学は関知しません。数学は，量の存在論を自らの埒外とします。

量の普遍対象は，一つの数の系 (N, ＋ , ×) に対する系 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) で定義されます。
特に，数の系 (N, ＋ , ×) のいろいろ（自然数，整数，有理数，‥‥）に応じて，量のタイプ (カテゴリー) のいろいろが導かれることになります。
以下，このことについて，説明します。

数学では，結局，量をつぎのカテゴリー区分で対象化していることになります：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ			
	大きさと１次元方向			
	大きさと２次元方向			
	⋮			

ただし，このうち「意味のあるカテゴリー」として実際に対象化しているのは，つぎのものです：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	○	○	○
	大きさと１次元方向	○	○	○
	大きさと２次元方向			○
	大きさと４次元方向			○
	⋮			⋮

そして，このカテゴリーを実現するものが，数 (系) です。
複数のカテゴリーがあるので，複数の数 (系) が必要になります。
これをつぎのようにつくっていきます――矢線の意味は「導出・拡張」：

$$\begin{tikzcd}
\text{自然数}(\mathbb{N},+,\times) \arrow[d] & & \\
\text{整数}(\mathbb{Z},+,\times) \arrow[r] & \text{有理数}(\mathbb{Q},+,\times) \arrow[r] & \text{実数}(\mathbb{R},+,\times) \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
& & \text{複素数}(\mathbb{C},+,\times) \arrow[d] \\
& & \text{四元数}(\mathbb{H},+,\times)
\end{tikzcd}$$

そして所期の＜量の普遍対象＞ (量形式) を，つぎのようにつくります：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$	$((\mathbb{Q}^+,+),\times,(\mathbb{Q}^+,+,\times))$	$((\mathbb{R}^+,+),\times,(\mathbb{R}^+,+,\times))$
	大きさと１次元方向	$((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$	$((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$	$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$
	⋮			⋮

(四元数については，つぎのテクストにあたってください：『四元数』)

註：「((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))」の話は，数学のどこにあるのか？
線型空間論で「体Ｋ上のｎ次元線型空間Ｅ」を少し進んだところで，

「Ｋからの線型空間Ｋｎの導出」
「線型空間ＥとＫｎの同型」

の話が出てきますが, このときの「線型空間 K^n」が「((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))」と対応しています。
ただし，「線型空間」と「量」は同じではありません：

自然数 (ℕ, ＋ , ×) に対する量 ((ℕ, ＋), ×, (ℕ, ＋ , ×)) は，線型空間ではない。
スカラが実数の２次元実線型空間 (($\mathbb{R}^2$, ＋), ×, (ℝ , ＋ , ×)) は量ではない。
一方，複素数をスカラとしたときの１次元の線型空間 (($\mathbb{R}^2$, ＋), ×, (ℂ , ＋ , ×)) は，((ℂ , ＋), ×, (ℂ , ＋ , ×)) と同型なので，量である。

1.2.3　量であるとは，量の普遍対象と同型であること

数学の「量」の定義は，つぎのようになります：

1. ＜量の普遍対象＞を，一つの数の系 (N, ＋ , ×) に対する系 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) として定義する。
2. これに同型な対象 ((Q , **＋**), $_{\times}$, (N, ＋ , ×)) を，「((N, ＋ , ×) を比の系とする) 量」と呼ぶ。

ここで，((Q , **＋**), $_{\times}$, (N, ＋ , ×)) が ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) と同型であるとは，１対１対応 $f : Q \longrightarrow N$ でつぎの条件を満たすものが存在するということ：

$$f(\mathbf{x} \mathbf{+} \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$f(\mathbf{x}\ _{\times}\ n) = f(\mathbf{x}) \times n$$

次節「｢量」の含意」で，((Q , **＋**), $_{\times}$, (N, ＋ , ×)) が確かに「量」のようになっていることを，見ていきます。

1.3「量」の含意

1.3.1「量測定」— 量が数に対して１次元であること
1.3.2　数の和は「倍の和」
1.3.3　数の積は「倍の倍」

1.3.1「量測定」——量が数に対して１次元であること

Ｑの任意の要素$\mathbf{q}$は，$f(\mathbf{u})=1$である$\mathbf{u}\in Q$ に対し，$\mathbf{q}=\mathbf{u}\boldsymbol{\times}n$，$n\in N$ の形に一意的に表されます。 ——これは，Ｑの要素が「ｕを単位にして測る」ことができ，そして「測定値はｎ」ということです。

証明：
$f(\mathbf{q})=n$とすると，$f(\mathbf{q})=f(\mathbf{u})\times n=f(\mathbf{u}\boldsymbol{\times}n)$
ｆは１対１だから，$\mathbf{q}=\mathbf{u}\boldsymbol{\times}n$
また，$\mathbf{u}\boldsymbol{\times}m=\mathbf{u}\boldsymbol{\times}n$ とすると，
$m=f(\mathbf{u})\times m=f(\mathbf{u}\boldsymbol{\times}m)=f(\mathbf{u}\boldsymbol{\times}n)=f(\mathbf{u})\times n=n$

また，(N, ×) が左可約ならば，Ｑの任意の要素$\mathbf{q}$に対し——ただし，(Q, +) に零元が存在するとき (すなわち (N, +) に零元が存在するとき) は，零元でない$\mathbf{q}$に対し——つぎが成り立つ：
$\mathbf{q}\boldsymbol{\times}m=\mathbf{q}\boldsymbol{\times}n$ ならば，$m=n$

証明：
$\mathbf{q}=\mathbf{u}\times k$ とすると，$k\times m=(f(\mathbf{u})\times k)\times m=f(\mathbf{u}\boldsymbol{\times}k)\times m=f(\mathbf{q})\times m=f(\mathbf{q}\boldsymbol{\times}m)=f(\mathbf{q}\boldsymbol{\times}n)=f(\mathbf{q})\times n=f(\mathbf{u}\boldsymbol{\times}k)\times n=(f(\mathbf{u})\times k)\times n=k\times n$
(N, ×) が左可約だから，$m=n$

1.3.2　数の和は「倍の和」

Qの要素の和は，数の和の計算になります：

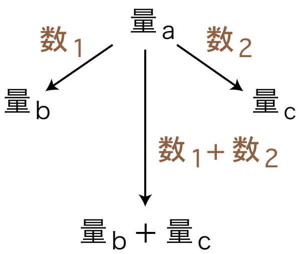
$$\mathbf{q}_{\times} m + \mathbf{q}_{\times} n = \mathbf{q}_{\times}(m + n)$$

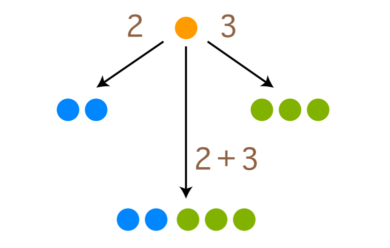
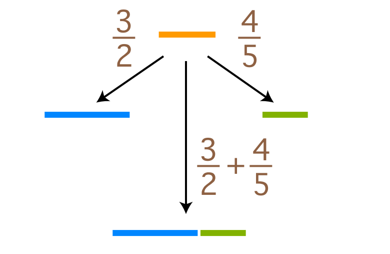
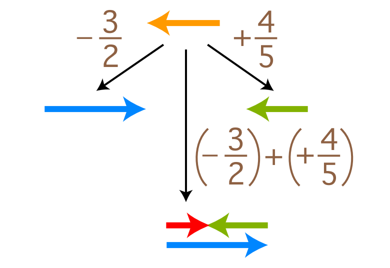
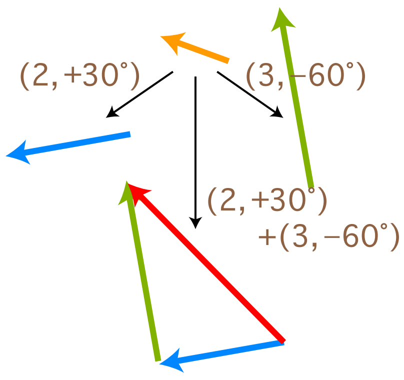
証明：

$f(\mathbf{q}_{\times} m + \mathbf{q}_{\times} n) = f(\mathbf{q}_{\times} m) + f(\mathbf{q}_{\times} n) = f(q) \times m + f(q) \times n = f(q) \times (m + n) = f(\mathbf{q}_{\times}(m + n))$

f は1対1だから，$\mathbf{q}_{\times} m + \mathbf{q}_{\times} n = \mathbf{q}_{\times}(m + n)$

これは，数の和の意味が「倍の和」がであるということです。



自然数	
分数	
正負の数	
複素数	

1.3.3　数の積は「倍の倍」

Qの要素の倍の倍は，数の積の計算になります：

$$(\mathbf{q} \,{}_{\times}\, m) \,{}_{\times}\, n = \mathbf{q} \,{}_{\times}\, (m \times n)$$

証明：

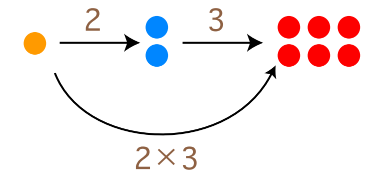
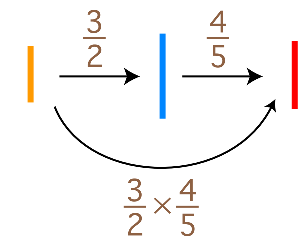
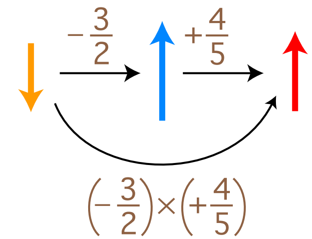
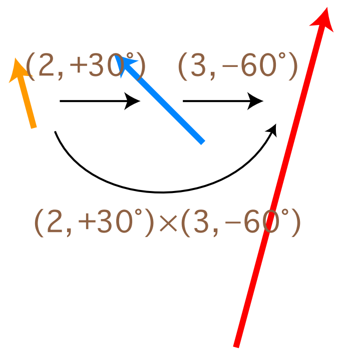
$f((\mathbf{q} \,{}_{\times}\, m) \,{}_{\times}\, n) = f(\mathbf{q} \,{}_{\times}\, m) \times n = (f(q) \times m) \times n =$

$f(q) \times (m \times n) = f(\mathbf{q} \,{}_{\times}\, (m \times n))$

f は1対1だから，$(\mathbf{q} \,{}_{\times}\, m) \,{}_{\times}\, n = \mathbf{q} \,{}_{\times}\, (m \times n)$

これは，数の積の意味が「倍の倍」がであるということです。

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$$

自然数	 2, 3, 2×3
分数	 $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5}$
正負の数	 $-\frac{3}{2}$, $+\frac{4}{5}$, $\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(+\frac{4}{5}\right)$
複素数	 $(2, +30^\circ)$, $(3, -60^\circ)$, $(2, +30^\circ) \times (3, -60^\circ)$

2　比例関係

2.1　比例関係
2.2　比例関係に対する量の見方

「数は量の比」の主題のつぎの発展は，２つの量の系 (「時間と距離」など) の間の関係です。そして, 基本的で最も重要な関係として「比例関係」が主題になります。

比例関係の著しい特徴は，「対応する２量が一つ決まれば，すべての対応が決まる」です。このことから，対応する２量の組を比例関係のネーミングに使う方法が立ちます (「毎秒 10m」など)。

比例関係から「量の数値の間の関係」を導くとき，「比例定数」が現れます。

比例関係は，さらにそれ自体を量と見ることができます（「速度」など)。

2.1　比例関係

2.1.1　比例関係への抽象
2.1.2「比例関係」の定義
2.1.3　分数値の場合
2.1.4　比例定数

2.1.1　比例関係への抽象

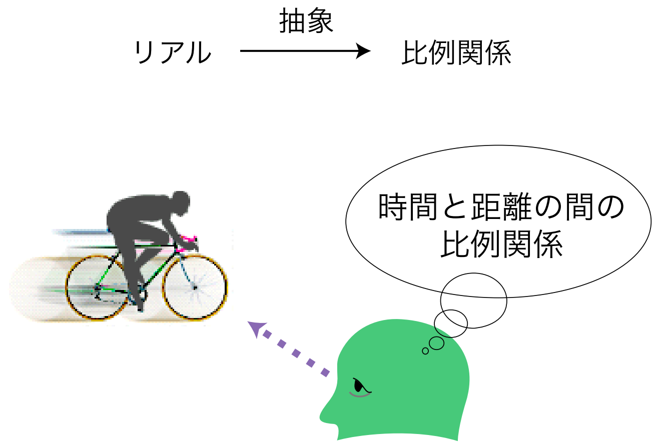
比 (倍関係) は，１つの量 (系) の中の２量関係です。
比例関係は，２つの量 (系) の間の２量関係です。

比例関係の代表的な例に，「速さ (速度)」があります。
「速さ」は，それ自体としては存在していません。リアルに存在しているのは，あくまでも物体の運動であり，それにわたしたちが速さを感じるわけです。
そして，ここで感じた「速さ」を，さらに時間と距離の対応関係に抽象します：

1. 「 時計」を導入し，
2. 経過時間と移動距離の対応を読む

とりわけ，「等速度運動」としての比例関係（「*時間が２倍，３倍，‥‥になれば距離も２倍，３倍，‥‥*」）を抽象します。

最初のリアルとそこから読み取った形（「比例関係」）の間には，著しいギャップがあります。それは自然な見方というものではまったくありません。「見えないものを見る」営みの顕著な一つが，ここにはあります。



2.1.2「比例関係」の定義

「比例関係」は，算数科では，

> *「一方が２倍，３倍，‥‥ になるとき，*
> *もう一方も２倍，３倍，‥‥ になる」*

の言い回しで導入されます。

例えば，「(一定の) 速さ」は，「時間」と「距離」の間の比例関係と解釈されます：

> *「経過時間が２倍，３倍，‥‥ になれば*
> *移動距離も２倍，３倍，‥‥」*

ここで，上の定義（ことばによる定義）の言い換えになる二つの形を，紹介します。――図による定義と式による定義です。

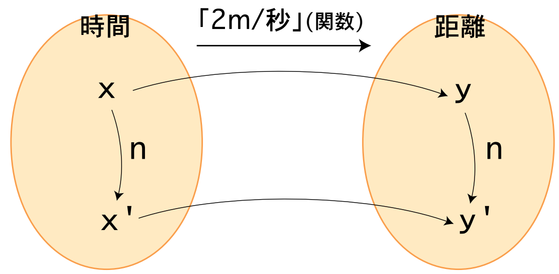
わかりやすいように，一般的な形で定義を示すのではなく，速さ「２m / 秒」を使うことにします。

速さ「２m / 秒」には，「*時間が２倍，３倍，‥‥ になれば距離も２倍，３倍，‥‥*」が含まれています。――実際，「5 秒のときは 10 m」と答えるとき，この条件を使っていることになります：

$$\begin{array}{ccc} \text{秒} & \longrightarrow & 2\text{m} \\ 5\downarrow & & \downarrow 5 \\ 5\,\text{秒} & \longrightarrow & 10\text{m} \end{array}$$

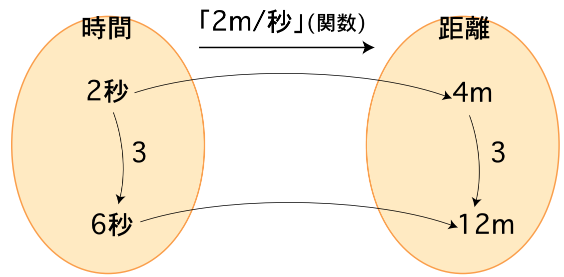
ここで，「集合」の考え (フィクション) を受け入れてください。――時間の集合 (すべての時間を要素とする集合) と距離の集合 (すべての距離を要素とする集合) 。

このとき，「２m / 秒」における「*時間が２倍，３倍，‥‥ になれば距離も２倍，３倍，‥‥*」は，つぎのように言い換えられます：

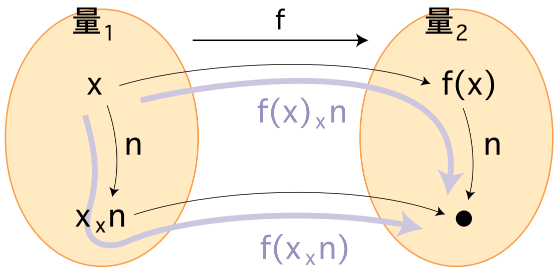


(n = 1, 2, 3, ‥‥)

例えば，つぎのような具合です：



つぎに, 関数「2m/ 秒」を f で表して, 上の図を式に置き換えてみましょう。つぎにようになります：



$$f(x \times n) = f(x) \times n$$

(ただし，× は倍作用の記号)

最後の図は，敢えて一般的な形に書きました。

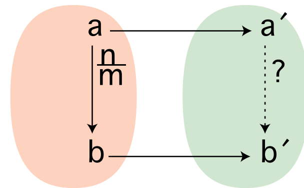
以上，比例関係の定義の３つの形態 (ことば，図，式) を示しました。
——見かけは違っても，定義していることは同じです。

2.1.3 分数値の場合

「比例関係」を，

「一方が２倍，３倍，‥‥ になるとき，
もう一方も２倍，３倍，‥‥ になる」

で定義しました。
では，自然数倍ではなく分数 n / m 倍の場合はどうなるのでしょう。

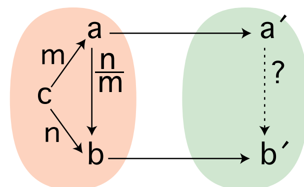


実は，定義より，つぎが導かれます：

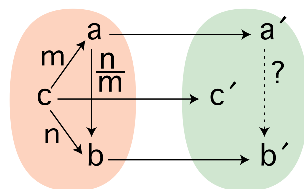
「一方が n / m 倍になるとき，もう一方も n / m になる」

以下，このことを示します。

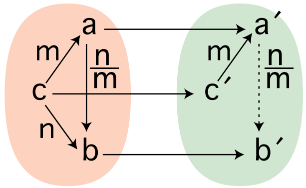
先ず，「n / m」の意味から，つぎの関係を満たす量 c がとれます：



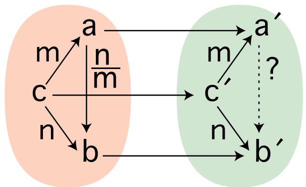
c の対応先を c ' とします：



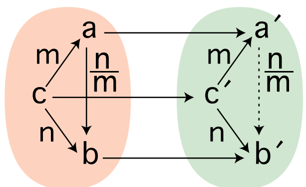
「比例関係」の定義より，m倍にはm倍が対応します：



同様に，n 倍には n 倍が対応します：



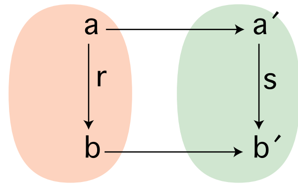
このとき，c' が a' と b' をm：n に共約している図が得られています！
よって，分数倍の定義より，a' と b' の比は n/m：



これで，n/m 倍には n/m 倍が対応することが示されました。

註：
比例関係で分数倍には同じ分数倍が対応することがわかりました。では，このことからさらに，実数倍には同じ実数倍が対応するでしょうか？答えは Yes ですが，証明は専門的内容になります。以下，その概略です。

つぎのようであるとします：



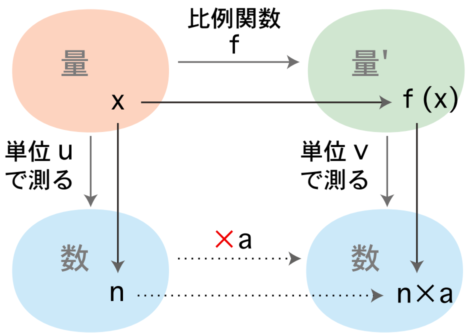
そして，r, s に収束する有理数列 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ をそれぞれ一つとります。

*「量の系は加法を伴う数と同型」*ですので，$\{a \times r_n\}$ は $a \times r = b$ に収束します。さらに，「分数倍には分数倍が対応する」を使って，$\{a' \times r_n\}$ が b' に収束することが導かれます。

一方，$\{a' \times s_n\}$ も b' に収束します。そして $\{a' \times r_n\}$ と $\{a' \times s_n\}$ の極限が同じということからは，$\{r_n\}$, $\{s_n\}$ の極限が同じであることが導かれます。すなわち，r = s です。

8.4 比例定数

二量の間の比例関係 (関数) f からは，つぎのように「測定値の対応」として，数の対応が導かれます。そして，この数の対応は「一定数倍」になります。――実際，f(**u**) を **v** で測った数値 a が，その定数になります。



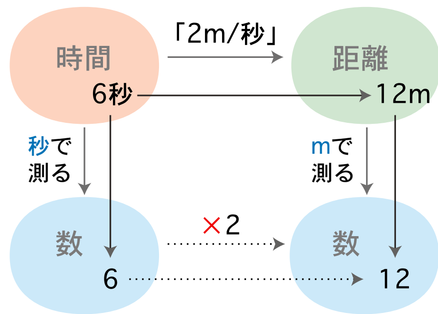
特に，定数 a は，**u** と **v** に依存します (単位 **u**, **v** を変えると，a の値も変わります)。

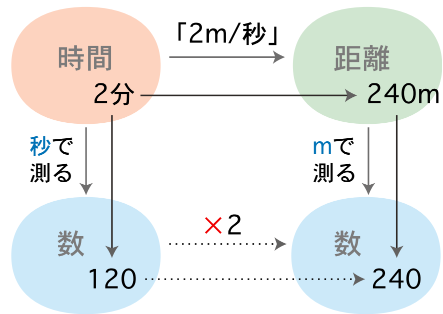
a は「**u** と **v** に関する f の表現数」と呼ぶべきものですが，「比例定数」がこれの伝統的な言い回しです。

どうして「一定数倍」になるのか，確かめるとしましょう。
量に対する数の倍作用を $\boldsymbol{\times}$ で表すことにします。「f(**u**) を **v** で測った値が a」とは，$f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \boldsymbol{\times} a$ ということです。また，**x** を **u** で測った値が n であるとは，$\mathbf{x} = \mathbf{u} \boldsymbol{\times} n$ ということです。 このとき，f(**x**) を **v** で測った値が n × a であること，すなわち $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \boldsymbol{\times} (n \times a)$ が，つぎのように導かれます：

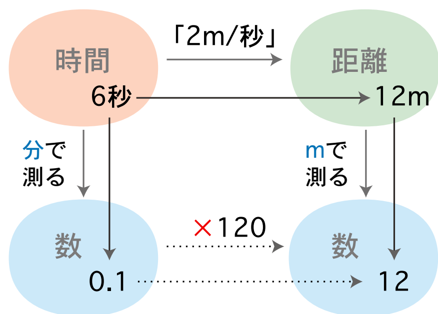
$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{x}) \\
&= f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) && (\mathbf{x} = \mathbf{u} \times n) \\
&= f(\mathbf{u}) \boldsymbol{\times} n && (\text{f が比例関数であることの条件}) \\
&= (\mathbf{v} \boldsymbol{\times} a) \boldsymbol{\times} n && (\text{条件：} f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \times a) \\
&= \mathbf{v} \boldsymbol{\times} (a \times n) && (\text{数の積の定義}) \\
&= \mathbf{v} \boldsymbol{\times} (n \times a)
\end{aligned}
$$

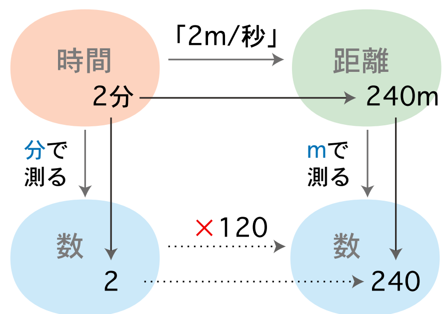
例： 比例関数「2m/ 秒」では，
(1) 秒とmに対する比例定数は 2：





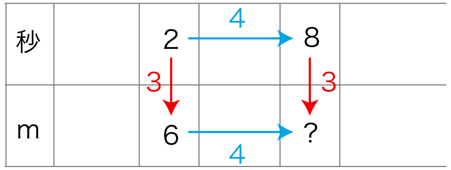
(2) 分とmに対する比例定数は 120：





比例定数は，小学算数ではつぎのような場面に現れています。

ある速さの＜時間 - 距離の対応表＞の問題：



(1) 比例の意味の「*一方が 2, 3, ‥‥倍なら他方も 2, 3, ‥‥倍*」を適用すれば，？＝ 6×4。

(2)「*測定値の対応は一定数倍*」を適用すれば，？＝ 8×3。

2.2　比例関係に対する量の見方

2.2.1「速さ」の場合

2.2.2　比例関係は量になる

2.2.1「速さ」の場合

わたしたちは，それとは意識せずに，速さを量として扱っています：

　「車の速度を，時速 40km から時速 80km へ２倍に上げた」
　「時速 2km の動く歩道の上を時速 4km で歩くと，時速 6km」

一方，速さは，時間と距離の間の比例関係としてとらえられました。

実際，どの比例関係も，量ととらえることができます。すなわち，「量」の要件を満たすように考えることができます。
速さは，一つの例です。

以下，このことを見ていきます。

2.2.2　比例関係は量になる

量には，倍と和が考えられました。
「比例関係を量と見ることができる」の意味には，「比例関係において倍と和を考えられる」が含まれています。
さて，比例関係において倍と和は，どのように考えられるのでしょう？

速さを例にします。
わたしたちは，あたりまえのように，速さの倍と和を使っています：

A. 時速 3km の２倍——これは，時速 (3×2)km：

　［1 時間に 3km が対応する比例関係］の２倍は，［1 時間に＜ 3km の２倍 ＞が対応する比例関係］

B.（時速 3km の動く歩道の上を時速 4km で歩くような場面で）
　時速 3km と時速 4km の和——これは，時速 (3 + 4)km：

　［1 時間に 3km が対応する比例関係］と［1 時間に 4km が対応する比例関係］の和は，［1 時間に＜ 3km と 4km の和＞が対応する比例関係］

「どの比例関係も量になる」を見るための別の例として，「時間と体積の間の比例関係」を取り上げてみます。
この比例関係は，「蛇口から水を出すときの，経過時間と出た水の体積」の場面に使えます。
そして，つぎのような計算をしています：

A. 毎秒 $3m^3$ の２倍——これは，毎秒 $(3\times 2)m^3$：
　［1 秒に $3m^3$ が対応する比例関係］の２倍は，［1 秒に＜ $3m^3$ の２倍 ＞が対応する比例関係］

B. (二つの蛇口から水をいっしょに出すような場面で)
　毎秒 $3m^3$ と毎秒 $4m^3$ の和——これは，毎秒 $(3+4)m^3$：
　［1 秒に $3m^3$ が対応する比例関係］と［1 秒に $4m^3$ が対応する比例関係］の和は，［1 秒に＜ $3m^3$ と $4m^3$ の和＞が対応する比例関係］

「比例関係は量と見ることができる」の数学は，つぎのようになります：

(N, ＋, ×) を数の系とする。——これから量形式 ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) を導かれる。
((Q , $\boldsymbol{+}$), $\boldsymbol{\times}$, (N, ＋, ×)), ((Q ', $\boldsymbol{+}$), $\boldsymbol{\times}$, (N, ＋, ×)) を，((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) と同型な量とする。
Q と Q' の間の比例関係全体の集合は，比例関係の間の算法$\boldsymbol{+}$と，比例関係に対する数の倍作用 $\boldsymbol{\times}$ をつぎのように定義するとき，((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) と同型な量になる：

$$(f \boldsymbol{+} g)(x) = f (x) \boldsymbol{+} g (x) \quad (x \in Q)$$
$$(f \boldsymbol{\times} k)(x) = f (x) \boldsymbol{\times} k \quad (x \in Q,\ k \in N)$$

実際にこの内容を手近な数学書の中にさがすならば，「線型代数」のつぎの内容がこれと対応していることになります：

体Ｋ上の二つの線型空間Ｖ，Ｖ ' に対し，ＶからＶ ' への線型写像全体の集合 Hom(Ｖ，Ｖ ') は，ｆ，ｇ∈ Hom(V, V'), k∈Ｋに対し ｆ$\boldsymbol{+}$ｇ および ｆｘｋ をつぎのように定義することにより，体Ｋ上の線型空間になる：

$$(f \boldsymbol{+} g)(x) = f (x) \boldsymbol{+} g (x) \quad (x \in V)$$
$$(f \boldsymbol{\times} k)(x) = f (x) \boldsymbol{\times} k \quad (x \in V ,\ k \in K)$$

3　量計算

3.1「量計算」の意味
3.2　＜量の倍＞の計算 (→ 倍の合成)
3.3　比例関係の問題解決
3.4　長方形の面積計算，直方体の体積計算
3.5　単位の換算
3.6　割り算が立式される問題のいろいろ（「6 ÷ 3」の場合)

この章では，学校数学に現れる量計算の問題を，数学で解く方法を示します。

学校数学での量計算問題の解き方は，ノウハウだったり，理屈を立ててやっていても数学になっていません。

参考：『数は量の比──「数は量の抽象」ではない』
『量とは何か？──学校数学の「量」と数学の「量」』
『「かけ算の順序」の数学』

したがってここでは，具体的で簡単な問題を用い，複数の視点で問題を括りつつ，量計算問題の数学の解き方をじっくりていねいに示していくことにします。取り上げる問題に重複も出てきますが，それは複数の視点で問題を括ることをやっているためです。

3.1「量計算」の意味

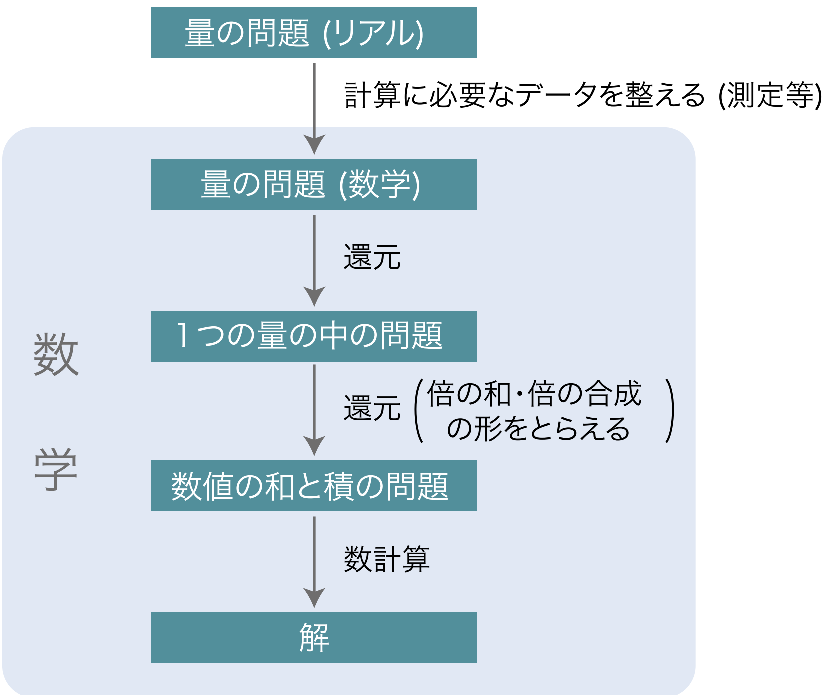
3.1.1　問題の還元：数値の和 / 積へ
3.1.2　量計算の公式の意味

3.1.1　問題の還元：数値の和 / 積へ

量計算は，量測定を行うなどして計算に必要な情報が揃ったところから始まるプロセスです。

一つの量（長さ，重さ等）の中の計算問題は，<倍の和>ないし<倍の倍>の形をとらえて，数値の和・積の問題に還元します。そして，これを解きます。

複数の量に関する計算問題は，一つの量（長さ，重さ等）の中の問題に還元して解きます。――比例関係の問題解決は，この場合にあたります。



3.1.2　量計算の公式の意味

速さの問題を解く公式として,「距離 ÷ 時間＝速さ」「距離 ÷ 速さ＝時間」「速さ × 時間＝距離」が使われています。この公式の意味は何でしょう？実際，×・÷ は数の演算の記号であって，量である時間・距離・速さに対して使われるものではありません。

長方形の面積を求める公式として，「タテ（の長さ）× ヨコ（の長さ）＝面積」というのもあります。これも，記号 × の文法からすると，おかしい表現です。

これらの公式で実際に述べられていることは，ある単位に対する量の数値の関係です。特に，<u>単位の取り方に依存</u>しています。

時間・距離・速さの場合であれば，距離の単位に「m」，時間の単位に「分」をとったときは, 速さの単位に「m/ 分」をとることになります（「単位をそろえる」）。そうすると,

「距離の数値 ÷ 時間の数値 ＝ 速さの数値」
「距離の数値 ÷ 速さの数値 ＝ 時間の数値」
「速さの数値 × 時間の数値 ＝ 距離の数値」

が成り立ちます。
このことを，「距離 ÷ 時間＝速さ」「距離 ÷ 速さ＝時間」「速さ × 時間＝距離」と言っているわけです。

また, 長方形の面積の場合であれば, 長さの単位に「cm」をとったときは, 面積の単位に「cm^2」をとることになります（「単位をそろえる」)。そ

うすると,

「タテの数値 × ヨコの数値 ＝ 面積の数値」

が成り立ちます。
このことを,「タテ × ヨコ ＝面積」と言っているわけです。

公式の適用はよくできていても, 公式の意味・理由は意識されていません。
実際, 学校数学も, 公式の意味･理由の理解に必要な数学 (「量」の数学) を教えるふうにはなっていません。

3.2　＜量の倍＞の計算 (→ 倍の合成)

3.2.1　＜量の倍＞の問題の３タイプ
3.2.2　推論：積 / 商の数式への還元
3.2.3　＜倍の合成＞の形式を抽出しにくい文章題

3.2.1　＜量の倍＞の問題の３タイプ

量の計算は，数の和・積の立式とこれの計算が要素になります。
ここでは，＜量の倍＞の計算を取り上げ，これの解法の論理を確認することにします。

例として，重さの倍関係「２ｇ (ぐらむ) の３倍は６ｇ」を考えます：

$$2\text{g} \xrightarrow{3} 6\text{g}$$

「３倍」「６ｇ」「２ｇ」のどれを未知にするかによって，つぎの３タイプの計算問題が導かれます：

「２ｇの何倍が６ｇか？」　$2\text{g} \xrightarrow{\text{何}} 6\text{g}$

「２ｇの３倍は何ｇか？」　$2\text{g} \xrightarrow{3} \text{何g}$

「何ｇの３倍が６ｇか？」　$\text{何g} \xrightarrow{3} 6\text{g}$

3.2.2　推論：積 / 商の数式への還元

「２ｇの３倍は６ｇ」から導かれる３タイプの問題：

　　「２ｇの何倍が６ｇか？」
　　「２ｇの３倍は何ｇか？」
　　「何ｇの３倍が６ｇか？」

に対する数学の解法は，つぎのようになります：

問題	「2gの何倍が6gか?」	「2gの3倍は何gか?」	「何gの3倍が6gか?」
問題を図式化	$2g \xrightarrow{何} 6g$	$2g \xrightarrow{3} 何g$	$何g \xrightarrow{3} 6g$
「○g」を分析	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 2g \arrow[r, "何"] & 6g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何"'] & 2g \arrow[r, "3"] & 何g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 何g \arrow[r, "3"] & 6g \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6 = 2 \times 何"'] & 2g \arrow[r, "何"] & 6g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何 = 2 \times 3"'] & 2g \arrow[r, "3"] & 何g \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6 = 何 \times 3"'] & 何g \arrow[r, "3"] & 6g \end{tikzcd}$
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝ 6 ÷ 2		何 ＝ 6 ÷ 3

3.2.3　＜倍の合成＞の形式を抽出しにくい文章題

1.「6人が2台の車に同じ数だけ分かれて乗るとき，1台の車に何人？」

問題から<倍>の構造を抽出	何人の2倍が6人か？
問題を図式化	何人 $\xrightarrow{2}$ 6人
「○人」を分析	人 $\xrightarrow{\text{何}}$ 何人 $\xrightarrow{2}$ 6人 6
「×」の文法 $\text{量}_a \xrightarrow{\text{数}_1} \text{量}_b \xrightarrow{\text{数}_2} \text{量}_c$ $\text{数}_1 \times \text{数}_2$	人 $\xrightarrow{\text{何}}$ 何人 $\xrightarrow{2}$ 6人 6 ＝ 何 × 2
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝ 6 ÷ 2

2.「6人が2人ずつ車に乗るとき，車は何台要る？」

問題から<倍>の構造を抽出	2人の何倍が6人か？
問題を図式化	2人 $\xrightarrow{\text{何}}$ 6人
「○人」を分析	人 $\xrightarrow{2}$ 2人 $\xrightarrow{\text{何}}$ 6人 6
「×」の文法 $\text{量}_a \xrightarrow{\text{数}_1} \text{量}_b \xrightarrow{\text{数}_2} \text{量}_c$ $\text{数}_1 \times \text{数}_2$	人 $\xrightarrow{2}$ 2人 $\xrightarrow{\text{何}}$ 6人 6 ＝ 2 × 何
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝ 6 ÷ 2

3.3　比例関係の問題解決

3.3.0　要旨
3.3.1　問題の３タイプ
3.3.2　例：速さの問題解決

3.3.0　要旨

比例関係の問題をきちんと解くことは，簡単ではありません。論理的な力を要します。

したがって，特に小学算数では，その場の方便や「公式」の適用といった形で，この主題をなんとかやり過ごしているというのが，現状です。例えば，「速さ」の問題は比例関係の問題になりますが，「距離 ÷ 時間＝速さ」「距離 ÷ 速さ＝時間」「速さ × 時間＝距離」の適用という以外に問題解決を説明できないというのが，一般的のようです。

ここでは, 比例関係の問題を論理的にきちんととらえて解くことを, やってみることにします。

比例関係の問題の解決は，つぎのように進みます：

1. ２つの量の系の間の比例関係の問題を，一方の量の系の中の倍関係の問題に還元する；
2. この倍関係の問題を，数の計算問題に還元する。

8.5.1 問題の３タイプ

　比例関係の問題は，速さの関係

「毎秒 ◯ m では ◯ 秒たつと◯ m」

を例にすると，３つの値のうち２つを示して残りを問うという形になります。よって，つぎの３タイプになります：

A.「毎秒 3/2 m では，4/5 秒たつと何m？」
B.「毎秒 3/2 m では，何秒たつと 4/5 m？」
C.「毎秒何 m なら，3/2 秒たつと 4/5 m？」

3.3.2　例：速さの問題解決

速さ（速度）の計算問題は，＜「時間と距離の間の比例関係」としての速さ＞の計算問題です。
したがって，速さの計算問題を解くことのうちには，速さを「時間と距離の間の比例関係」としてきちんと理解できていることが含まれます。

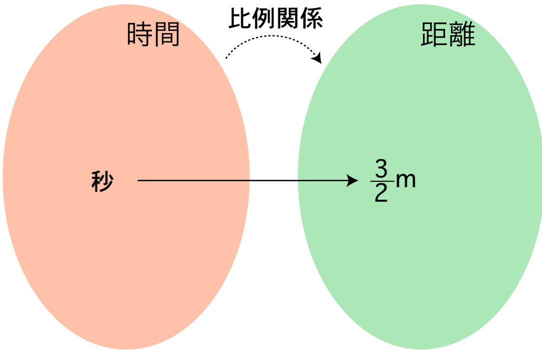
ここでは，具体的につぎの問題を解いていきます：

A.「毎秒 3/2 m では，4/5 秒たつと何m？」
　（「何」に式「3/2 × 4/5」を立てる理由）
B.「毎秒 3/2 m では，何秒たつと 4/5 m？」
　（「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由）
C.「毎秒何 m なら，3/2 秒たつと 4/5 m？」
　（「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由）

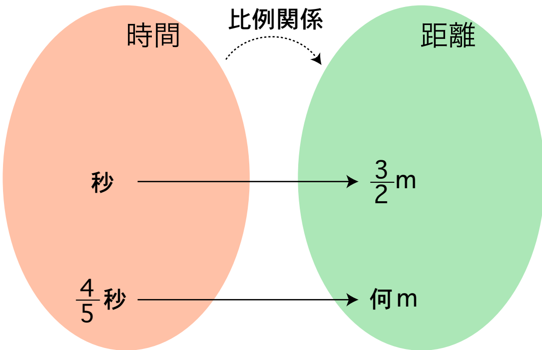
A.「毎秒 3/2 m では，4/5 秒たつと何m？」

（「何」に式「3/2 × 4/5」を立てる理由）

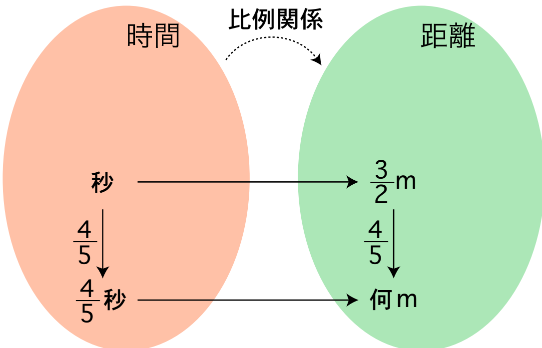
(1)「毎秒 3/2 m」の含意：



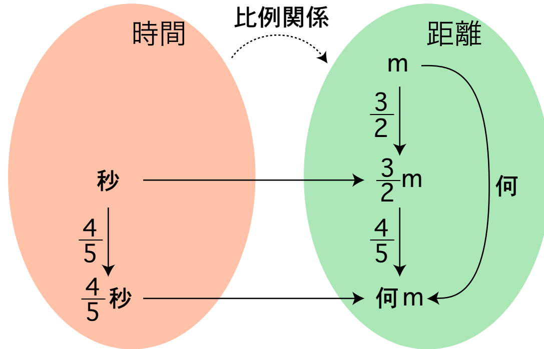
(2) この図に，「4/5 秒たつと何m？」を書き加える：



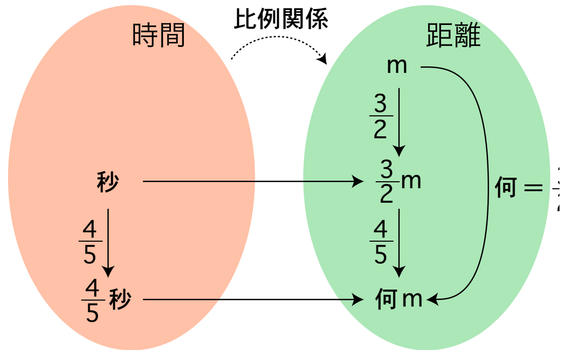
(3) 4/5 秒は秒の 4/5 倍。
比例関係の条件から，この 4/5 倍が他方に移る。



(4) 3/2m と「何」m は，それぞれ m の 3/2 倍と「何」倍：



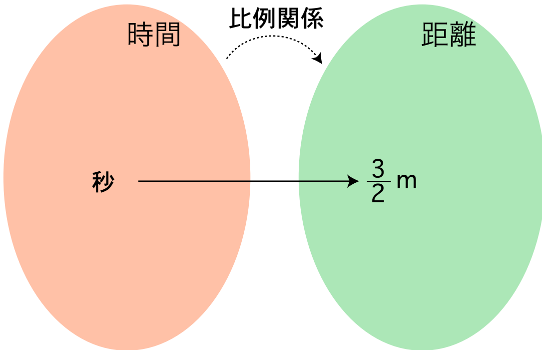
(5) 3/2 倍と 4/5 倍の合成は，(3/2×4/5) 倍。そして，これが「何」倍に等しい。
したがって，求める「何」は，3/2×4/5。



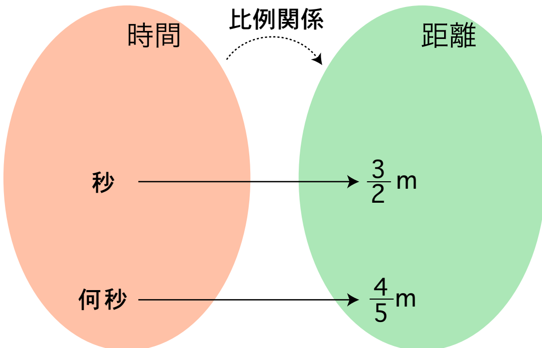
B.「毎秒 3/2 m では，何秒たつと 4/5 m？」

（「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由）

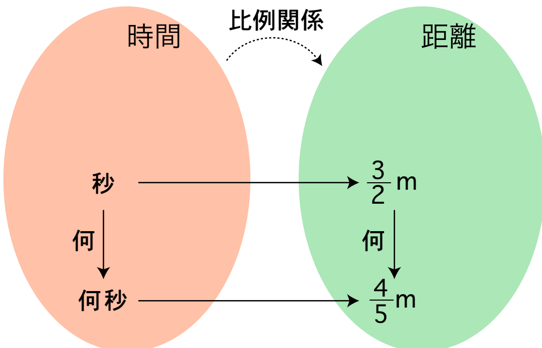
(1)「毎秒 3/2 m」の含意：



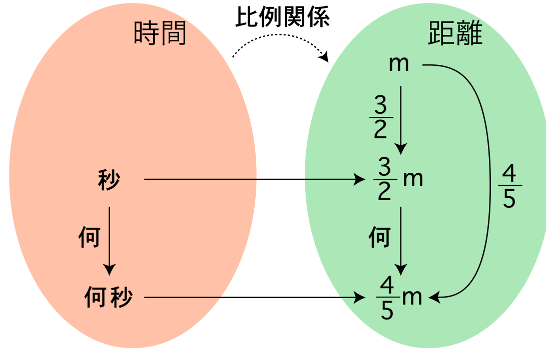
(2) この図に，「何秒たつと 4/5 m？」を書き加える。



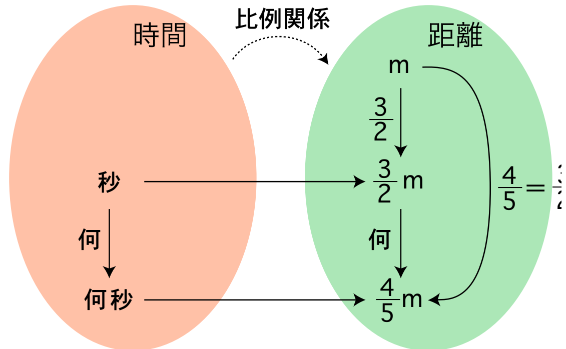
(3)「何」秒は秒の「何」倍。
比例関係の条件から，この「何」倍が他方に移る。



(4) 3/2m と 4/5m は，それぞれ m の 3/2 倍と 4/5 倍：



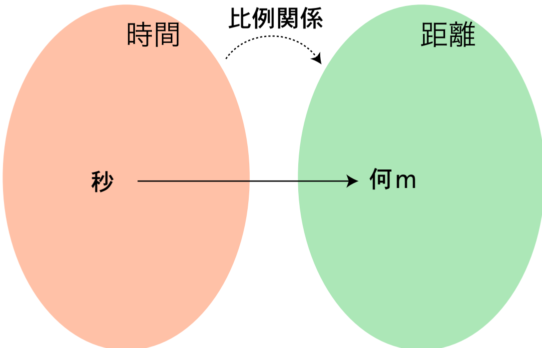
(5) 3/2 倍と「何」倍の合成は，(3/2× 何) 倍。そして，これが 4/5 倍に等しい。
したがって，求める「何」は，4/5÷3/2。



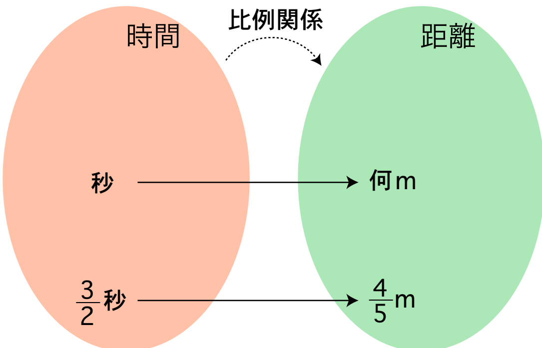
C.「毎秒何 m なら，3/2 秒たつと 4/5 m？」

（「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由）

(1)「毎秒 何 m」の含意：

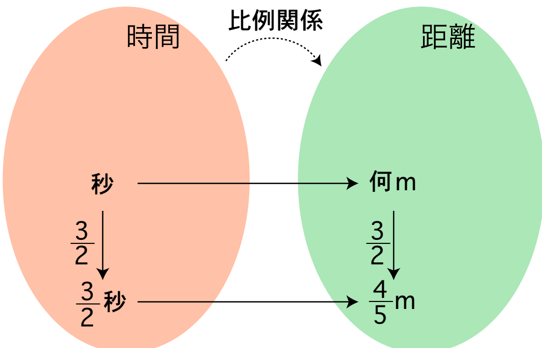


(2) この図に，「何秒たつと 4/5 m？」を書き加える。

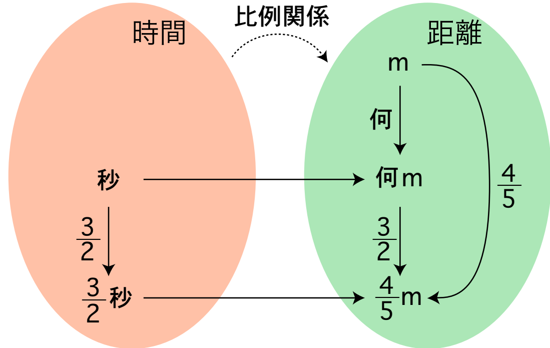


(3) 3/2 秒は秒の 3/2 倍。

比例関係の条件から，この 3/2 倍が他方に移る。

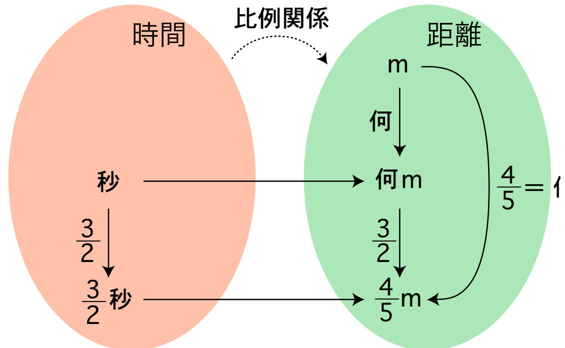


(4)「何」m と 4/5m は，それぞれ m の「何」倍と 4/5 倍：



(5)「何」倍と 3/2 倍の合成は，(何 ×3/2) 倍。そして，これが 4/5 倍に等しい。

したがって，求める「何」は，4/5÷3/2。



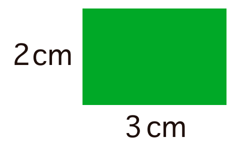
3.4　長方形の面積計算，直方体の体積計算

3.4.1　長方形の面積計算
3.4.2　直方体の体積計算

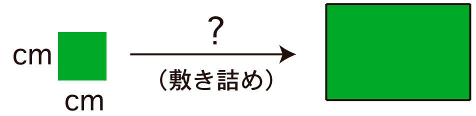
9.6.2 長方形の面積計算

長方形の面積は，隣り合う２辺の長さの数値に対する計算で求めることができます。

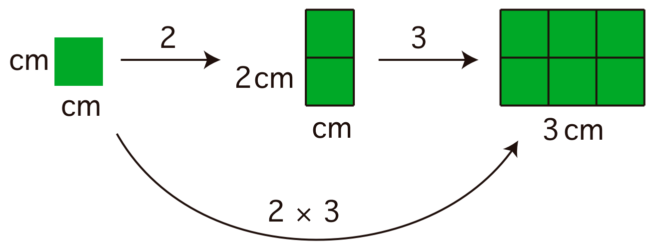
最初に，＜長さの数値が自然数の場合＞をやってみましょう。
つぎの長方形の面積 (単位 cm2) を考えます：



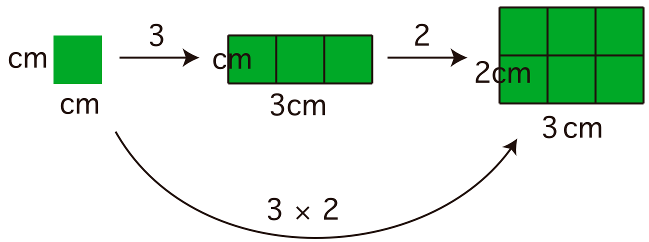
面積を求めるとは，「単位長さ四方の正方形がいくつ入るか」を求めるということです。
そして，単位 cm^2 で面積を求めるとは，つぎの敷き詰めを考えることです：



このとき，つぎの倍関係をとらえます：



あるいは



cm^2 を単位とする数値「?」の立式は,

　最初の図のように「２倍して３倍」のように構造化したときは ,
　「２× ３」
　後の図のように「３倍して２倍」のように構造化したときは ,
　「３× ２」

に，それぞれなります。（確認：積の意味 (記号「×」の文法))
すなわち,

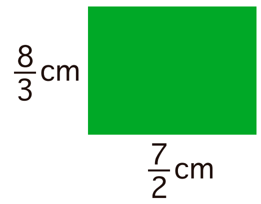
　「cm^2 を単位とした面積の数値が,
　隣り合う２辺の長さの cm を単位とした数値の積で求められる。」

ということです。
そして，このことを短く言い表したのが「タテ × ヨコ」です。

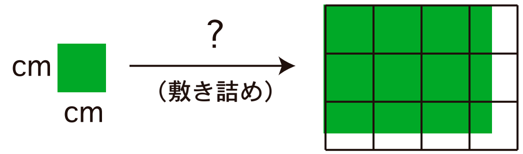
<u>「タテ × ヨコ」は，長さ × 長さ ではありません。</u>
「×」は，数に対して定義されます。
「重さ × 重さ」を考えよと言われたら，「何それ ?!」のリアクションになるはずです。「長さ × 長さ」も，このようにリアクションするべきものです。

<長さの数値が分数値の場合>にも，いま述べた意味の「タテ × ヨコ」を既に使っているでしょう。
どうしてこの計算になるのかも，確認しておきます。

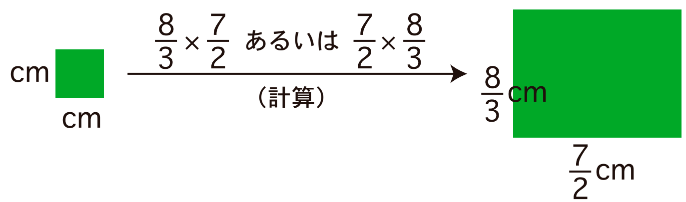
つぎの長方形の面積 (単位 cm^2) を考えましょう：



cm 四方の正方形で敷き詰めることはできません：



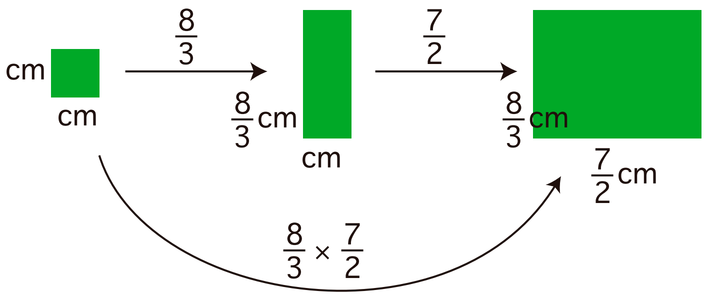
しかし，この長方形の面積は，「cm 四方の正方形の面積の (8/3 × 7/2) 倍」あるいは「cm 四方の正方形の面積の (7/2 × 8/3) 倍」と求められます：



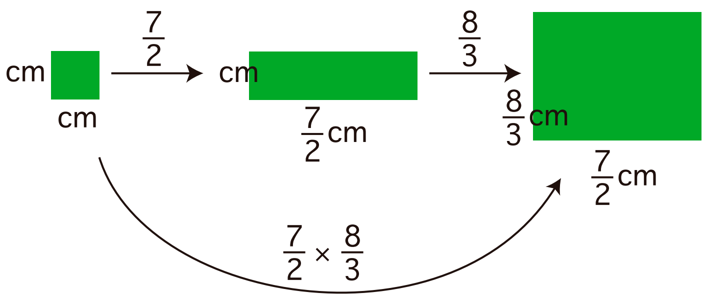
どうして？
ここでは，つぎのことを使います：

「隣り合う２辺の一方の辺の長さを固定したとき，
他方の辺の長さと面積は比例関係にある。」(註)

実際，これより，つぎの関係が成立します：

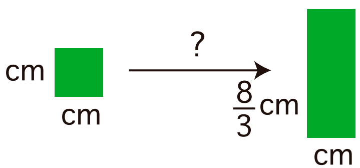


あるいは

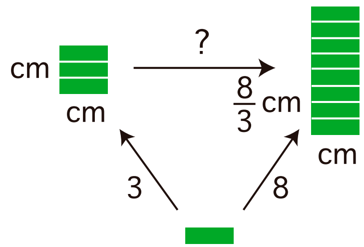


(確認：積の意味 (記号「×」の文法))

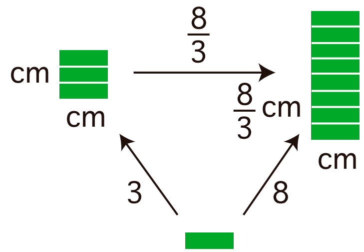
註：つぎの倍が 8/3 倍になることを説明します：



左右の長方形のタテの長さを 3 と 8 に共約する長さがとれます。この長さをタテの長さとし，ヨコの長さが同じである長方形をとります。これによって，左右の長方形が 3 と 8 に共約されます：



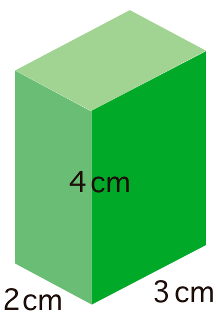
よって，面積の 8/3 倍が結論されます：



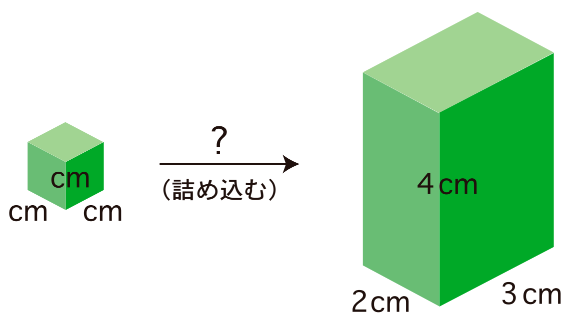
3.4.2　直方体の体積計算

直方体の体積は，隣り合う３辺の長さの数値に対する計算で求めることができます。
考え方は，長方形の面積のときと同じです。

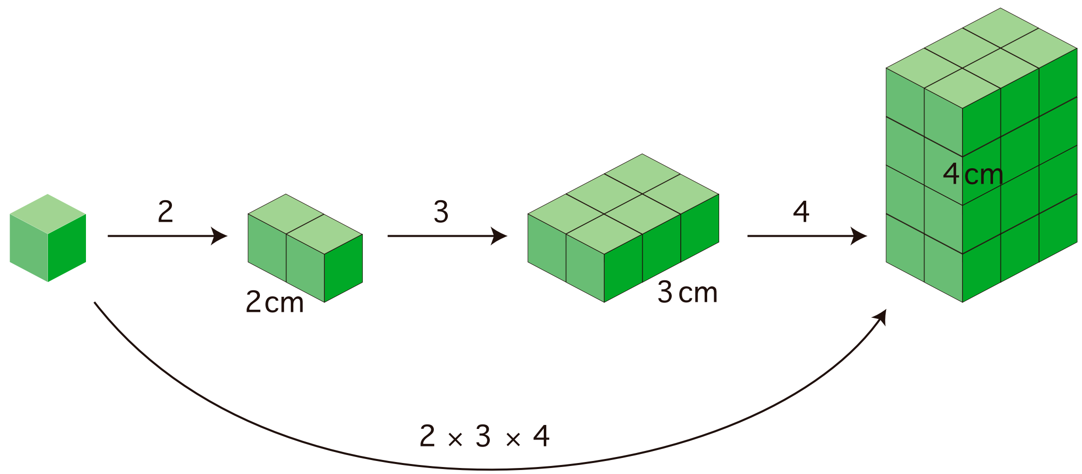
＜長さの数値が自然数の場合＞をやってみましょう。
つぎの直方体の体積 (単位 cm^3) を考えます：



体積を求めるとは，「単位長さ立方の立方体がいくつ入るか」を求めるということです。
そして，単位 cm^3 で体積を求めるとは，つぎの詰め込みを考えることです：



このとき，つぎの倍関係をとらえます：



(確認：積の意味 (記号「×」の文法))

よって，cm^3 を単位とする数値は，２× ３× ４ になります。
すなわち，

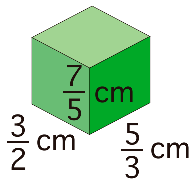
　「cm^3 を単位とした体積の数値が，
　　cm を単位としたタテ・ヨコ・タカサの数値の積で求められる。」

ということです。
そして，このことを短く言い表したのが「タテ × ヨコ × タカサ」です。

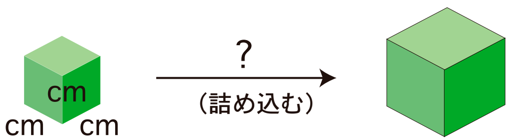
「タテ × ヨコ × タカサ」は，長さ × 長さ × 長さ ではありません。
「×」は，数に対して定義されます。
「重さ × 重さ × 重さ」を考えよと言われたら,「何それ ?!」のリアクションになるはずです。「長さ × 長さ × 長さ」も，このようにリアクションするべきものです。

＜長さの数値が分数値の場合＞にも，いま述べた意味の「タテ × ヨコ × タカサ」を既に使っているでしょう。
どうしてこの計算になるのかも，確認しておきます。

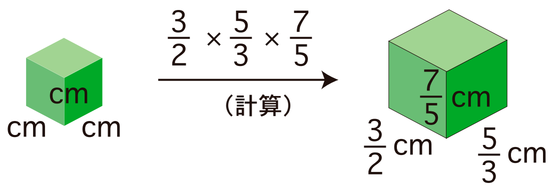
つぎの直方体の体積 (単位 cm^3) を考えましょう：



cm 立方の立方体をピッタリ詰め込むことはできません：



しかし，この直方体の体積は，「cm 立方の立方体の体積の (3/2 × 5/3 × 7/5) 倍」と求められます：

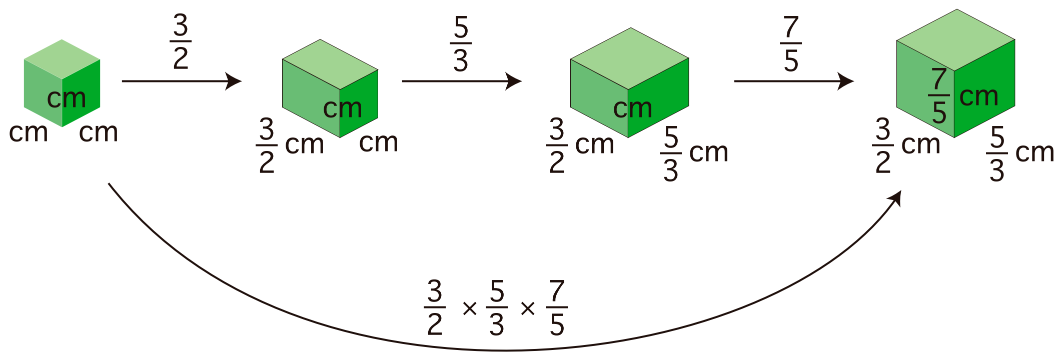


どうして？

ここでは，つぎのことを使います：

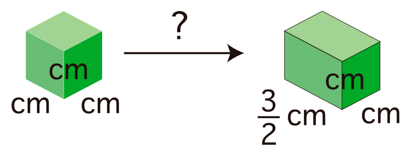
「ヨコとタカサの長さを固定したとき，
　　タテの長さと体積は比例関係にある」
「タテとタカサの長さを固定したとき，
　　ヨコの長さと体積は比例関係にある」
「タテとヨコの長さを固定したとき，
　　タカサの長さと体積は比例関係にある」

実際，これより，つぎの関係が成立します：

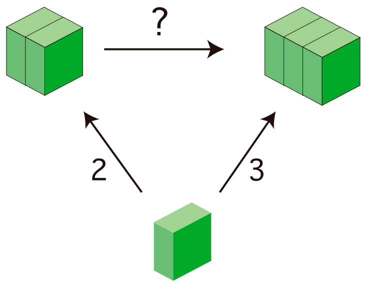


註：「*ヨコとタカサの長さを固定したとき，タテの長さと体積は比例関係にある*」は，つぎのように説明されます：

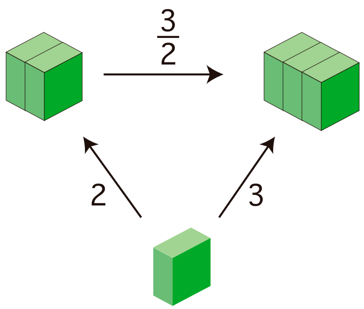
つぎの倍が 3/2 倍になること (上図) を説明します：



左右の直方体のタテの長さを 2 と 3 に共約する長さがとれます。この長さをタテの長さとし，ヨコとタカサの長さが同じである直方体をとります。これによって，左右の直方体が 2 と 3 に共約されます：



よって，体積の 3/2 倍が結論されます：



3.5　単位の換算

3.5.1　単位換算の推論プロセス
3.5.2　比例関係と単位換算が合わさった問題

3.5.1　単位換算の推論プロセス

1.「２mは何 cm ？」で,「何＝ 100 × ２」が導かれる論理

問題から<倍>の構造を抽出	cmの何倍が２mか？
問題を図式化	$\mathrm{cm} \xrightarrow{何} 2\,\mathrm{m}$
「2m」と「cm」を分析	$\begin{tikzcd} & \mathrm{m} \arrow[dr, "2"] & \\ \mathrm{cm} \arrow[ur, "100"] \arrow[rr, "何"] & & 2\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & \mathrm{m} \arrow[dr, "2"] & \\ \mathrm{cm} \arrow[ur, "100"] \arrow[rr] & & 2\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$ 何＝100 ×2 $\begin{tikzcd} \mathrm{cm} \arrow[r, "100"] \arrow[rr, bend right, "何＝100 \times 2"'] & \mathrm{m} \arrow[r, "2"] & 2\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$

2.「2ｃｍは何 m ？」で,「何＝２÷ 100」が導かれる論理

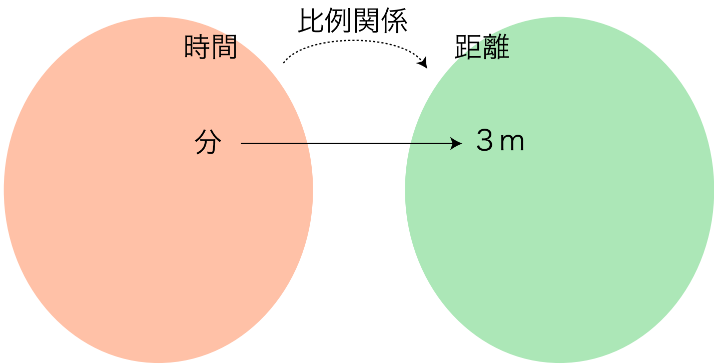
問題から<倍>の構造を抽出	mの何倍が２cm か？
問題を図式化	$\mathrm{m} \xrightarrow{何} 2\,\mathrm{cm}$
「m」と「2cm」を分析	$\begin{tikzcd} \mathrm{cm} \arrow[r, "100"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & \mathrm{m} \arrow[r, "何"] & 2\,\mathrm{cm} \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathrm{cm} \arrow[r, "100"] \arrow[rr, bend right] & \mathrm{m} \arrow[r, "何"] & 2\,\mathrm{cm} \end{tikzcd}$ 何 × 100 ＝ 2
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何＝ 2 ÷100

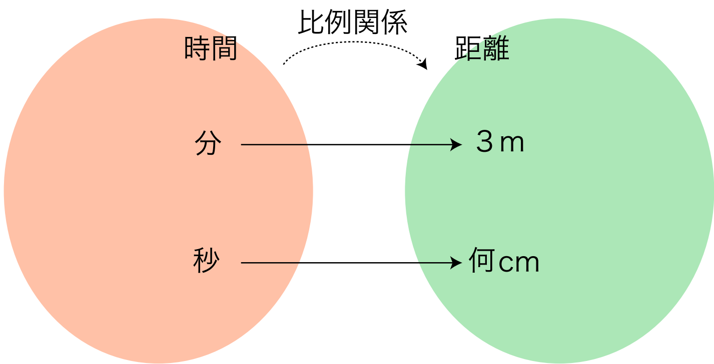
3.5.2　比例関係と単位換算が合わさった問題

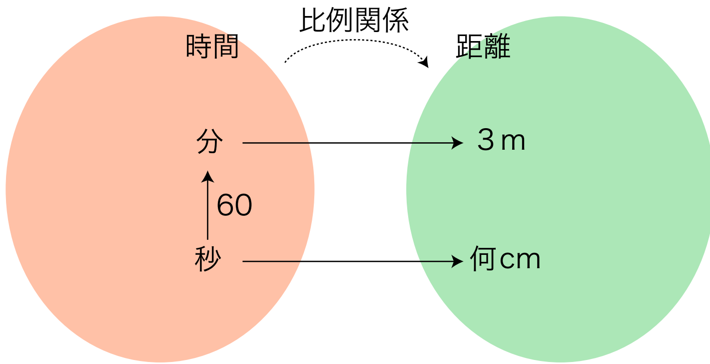
つぎは，比例関係と単位の換算を合わせた問題です：

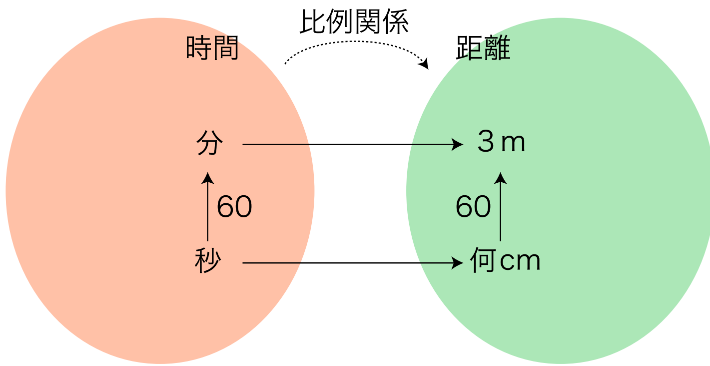
「「3 m / 分は，何 cm/ 秒？」

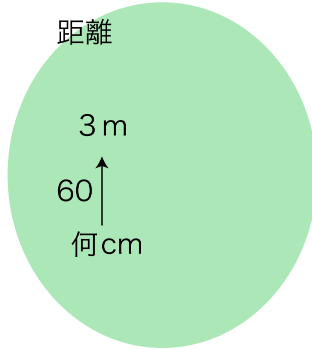
そして，つぎがこれの推論 (計算) です：

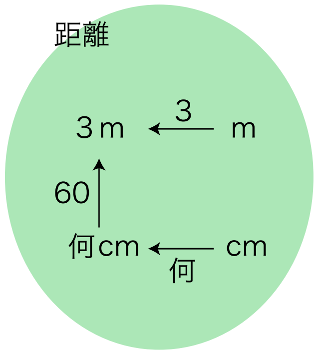


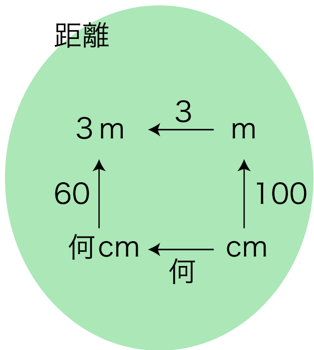












何×60 ＝ 100 × 3

何＝ (100 × 3)　÷60

3.6　割り算が立式される問題のいろいろ（「6÷ 3」の場合）

3.6.1 「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形

3.6.2 「6 m のひもを 3 本に等分すると，1 本何 m ？」

3.6.3 「6 m のひもを何本に等分すると，1 本 3 m ？」

3.6.4 「1 ヤードは 3 フィート，6 フィートは何ヤード？」

3.6.5 「面積 6 cm2，タテ 3 cm の長方形のヨコは何 cm ？」

3.6.6 「3 km/h で 6 km 進むのに要する時間は？」

3.6.1「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形

「6÷ 3」の意味は，つぎのようになります：

$$3 \times \square = \square \times 3 = 6$$

「6 ÷ 3」

また，「3× □」「□ × 3」の意味は，つぎのようになります：

$$\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times \square"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\square"] & \text{量}_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "\square \times 3"'] & \text{量}_b \arrow[r, "3"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$$

そこで，つぎが「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形です：

$$\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\square"] & \text{量}_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{量}_b \arrow[r, "3"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$$

3.6.2「6 m のひもを 3 本に等分すると，１本何 m ？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

問題から<倍>の構造を抽出	何mの 3 倍が 6mか？
問題を図式化	$\text{何m} \xrightarrow{3} 6\text{m}$
「○m」を分析	$\begin{tikzcd} \text{m} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{何m} \arrow[r, "3"] & 6\text{m} \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\text{数}_1"] \arrow[rr, bend right, "\text{数}_1 \times \text{数}_2"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\text{数}_2"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \text{m} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "\text{何} \times 3 = 6"'] & \text{何m} \arrow[r, "3"] & 6\text{m} \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $\text{m} \times \bigcirc = \bigcirc \times \text{m} = \text{n}$ 「n ÷ m」	何＝ 6 ÷ 3

3.6.3「６m のひもを何本に等分すると，１本３m？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

問題から<倍>の構造を抽出	３mの何倍が 6mか？
問題を図式化	$3m \xrightarrow{何} 6m$
「○m」を分析	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 3m \arrow[r, "何"] & 6m \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times 何 = 6"'] & 3m \arrow[r, "何"] & 6m \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $m \times ○ = ○ \times m = n$ 「n ÷ m」	何＝ 6 ÷ 3

3.6.4「1 ヤードは３フィート，6 フィートは何ヤード？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

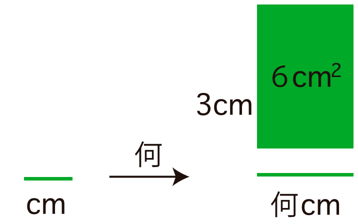
問題から<倍>の構造を抽出	何mの３倍が 6mか？
問題を図式化	$ヤード \xrightarrow{何} 6フィート$
「○m」を分析	$\begin{tikzcd} フット \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & ヤード \arrow[r, "何"] & 6フィート \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} フット \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times 何 = 6"'] & ヤード \arrow[r, "何"] & 6フィート \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $m \times ○ = ○ \times m = n$ 「n ÷ m」	何＝ 6 ÷ 3

3.6.5「面積 6 cm^2,　タテ 3 cm の長方形の ヨコは何 cm ？」

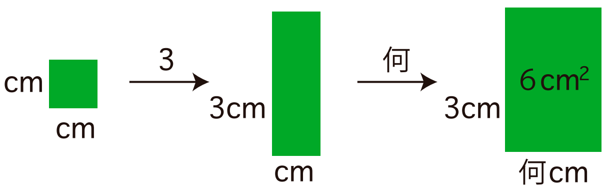
つぎのことを使います：

（＊）　*「隣り合う２辺の一方の辺の長さを固定したとき，他方の辺の長さと面積は比例関係にある。」*

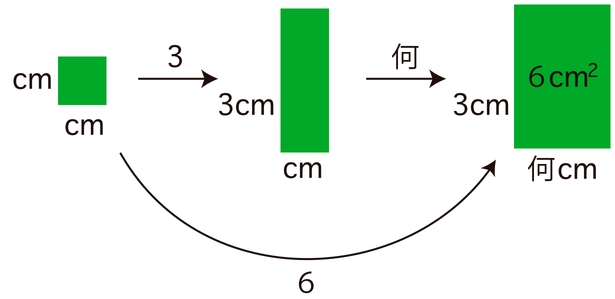
問題から＜倍＞の構造を抽出



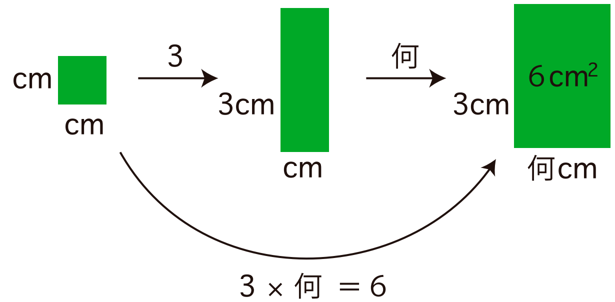
(＊) を適用



「6 cm^2」を分析



「×」の文法

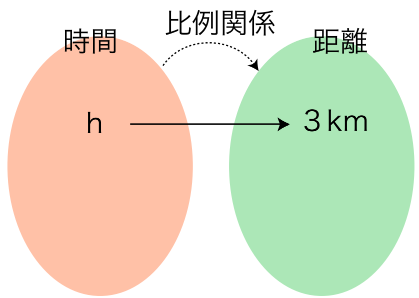
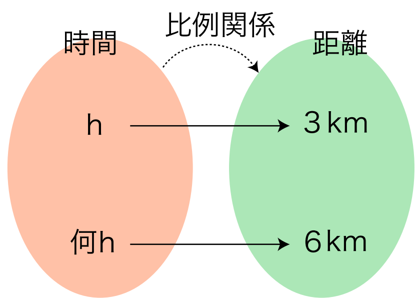


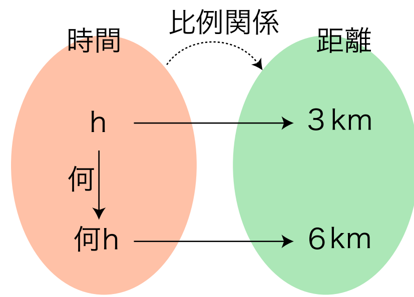
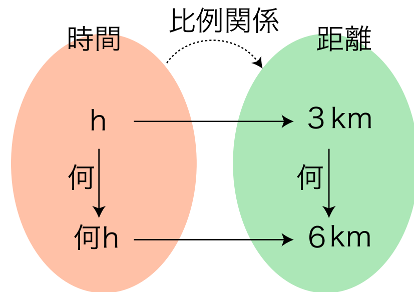
「÷」の文法

何＝ 6 ÷ 3

3.6.6「3km/h で6km 進むのに要する時間は？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

問題を図式化	「3km/h」の含意	
	「何hで6km?」を書く	

「比例関係」の適用	「何h」を分析	
	一方の「何」倍に他方の「何」倍が対応	
倍関係の問題として解く	倍関係の問題に還元	$3\text{km} \xrightarrow{何} 6\text{km}$
	「○km」を分析	$\begin{tikzcd} \text{km} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 3\text{km} \arrow[r, "何"] & 6\text{km} \end{tikzcd}$
	「×」の文法	$\begin{tikzcd} \text{km} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times 何 = 6"'] & 3\text{km} \arrow[r, "何"] & 6\text{km} \end{tikzcd}$
	「÷」の文法	何＝ 6 ÷ 3

4　位

4.1　位の表現
4.2　位の構造
4.3　位計算

数（N，＋，×）からは，量形式（（N，＋），×,（N，＋，×））が導かれます。
そしてこれからさらに, 位の形式（N，＋,（（N，＋），×,（N，＋，×））が導かれます。——量形式（（N，＋），×,（N，＋，×））に集合のNと加法の＋を加えたものが，位形式です。

「位」は，わたしたちがごく普通に対象化しているものです。
卑近なものでは，（時刻，時間，数）や（高度，昇降，数）は「位」の例になります。
数学的な「位」は，（直線上の位置，直線上の移動，数）や（平面上の位置，平面上の移動，数），（空間内の位置，空間内の移動，数）です。
ここで，（時刻，時間，数），（高度，昇降，数），（直線上の位置，直線上の移動，数）の数は「正負の数」，（平面上の位置，平面上の移動，数）の数は複素数，そして（空間内の位置，空間内の移動，数）の数は四元数，というぐあいになります。

位形式（N，＋,（（N，＋），×,（N，＋，×）））は，数（N，＋，×）から機械的に導かれます。したがって，実際性の考えにくい場合も出てきます。
自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数 → 四元数 の流れでいうと，正負の数以降から，位がわたしたちの対象化するものになってきます。
例えば整数だと，「横一列に並んだ人の中のひとりを位置で特定する」で用いることができて，このときの位置は「位」です。

4.1　位の表現

4.1.0　要旨
4.1.1　位の表現——存在の３態：位・量・数
4.1.2　直線上の位置の表現——正負の数の使用
4.1.3　平面上の位置の表現——複素数の使用

4.1.0　要旨

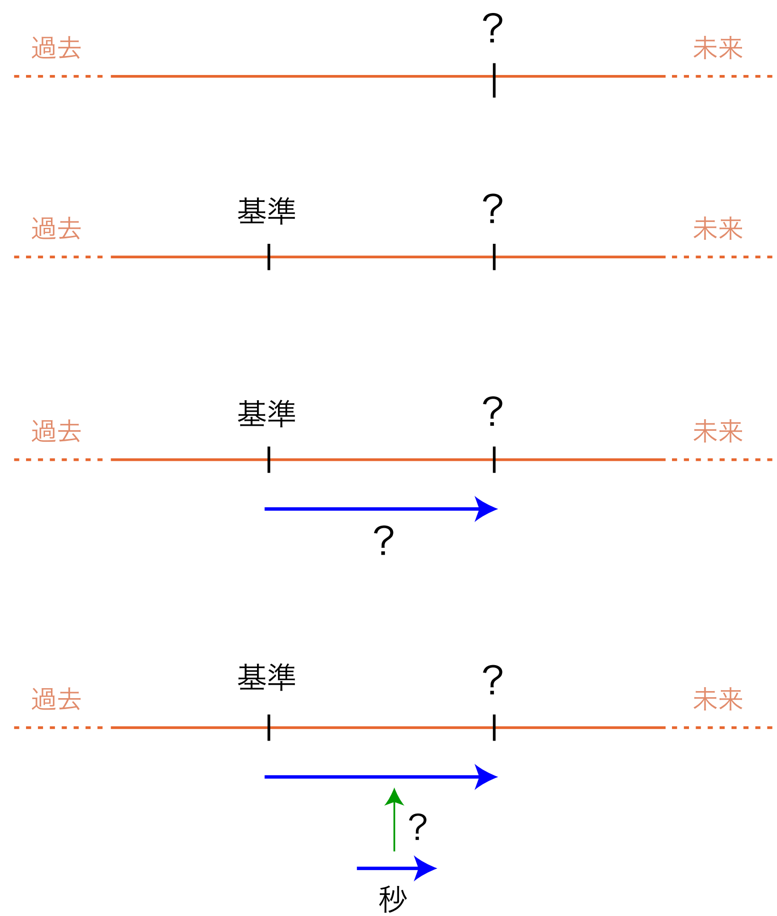
ここでは，正負の数，複素数の使用として「位」表現が起こることを，示します。
この「位」表現では，３つの異なる存在「位・量・数」が現れます。

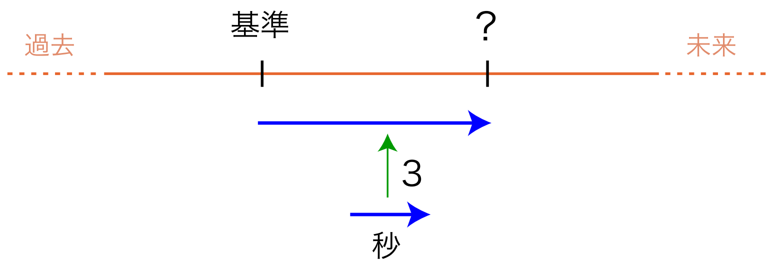
「位・量・数」は，わたしたちがごくあたりまえに数を使っているときの形です。したがって，例をもとに考えていけば，あたりまえの話として理解できます。

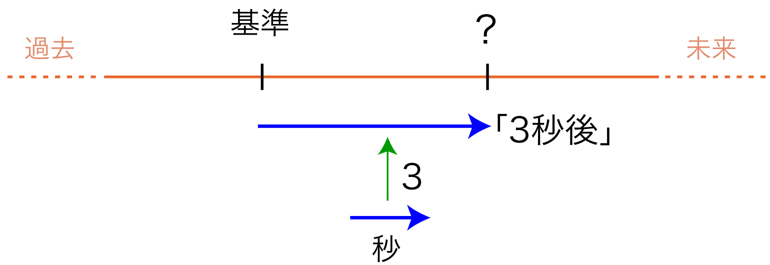
そこで,「位」の卑近な例となる「時刻」と「高度」から入ることにします。
この例で「位」の形式をとらえたところで，さらに「直線上の位置」「平面上の位置」において「位」の形式を確認していきます。

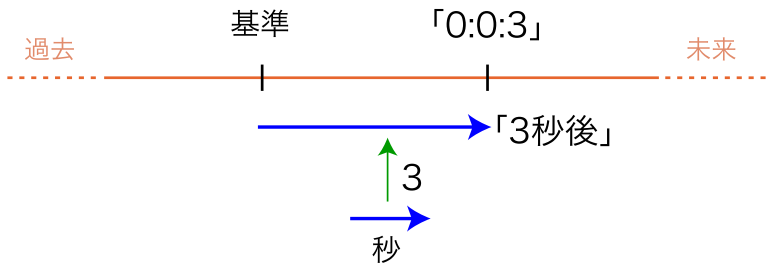
4.1.1　位の表現——存在の３態：位・量・数

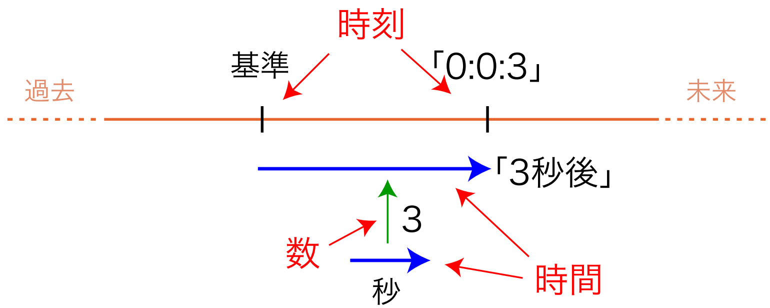
時刻の表現「0:0:3」のしくみを考えてみましょう。
これは，つぎのように分析されます：



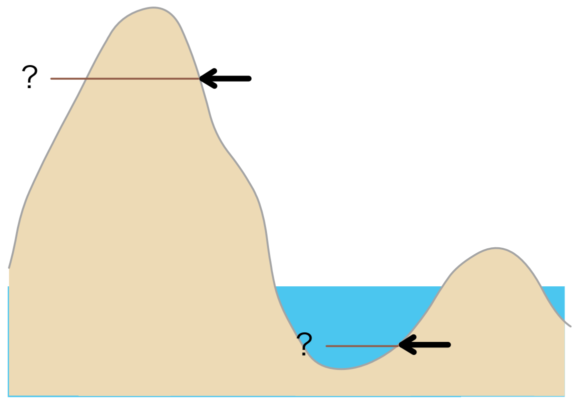


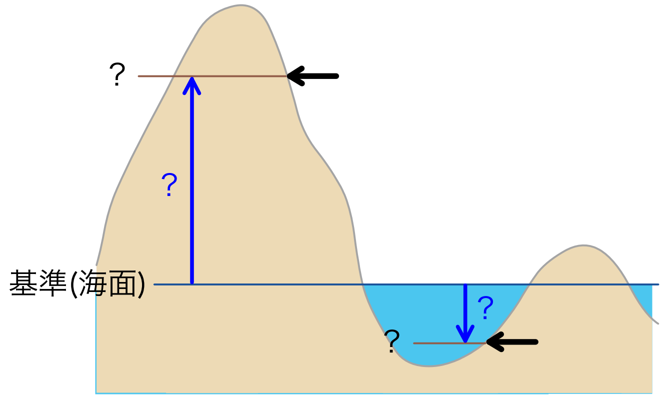


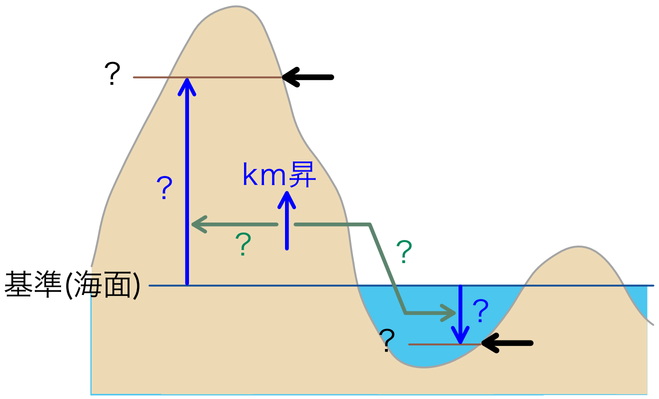


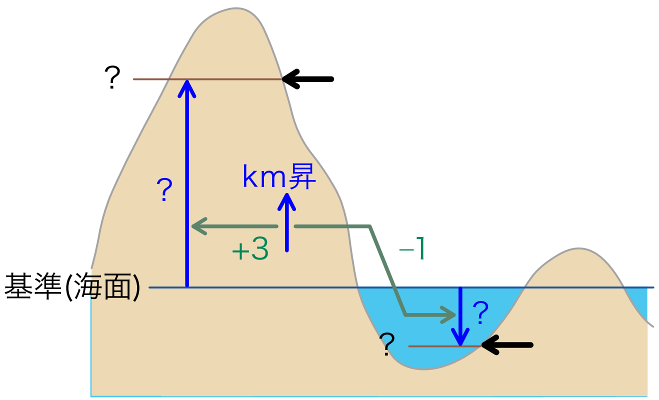


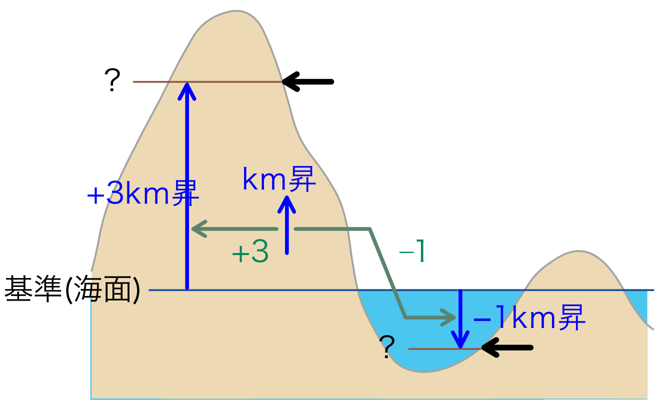
つぎに,「高度３km」「深度１km」の表現のしくみを考えてみましょう。山の高さ・海の深さの場合で考えると，つぎのように分析されます：

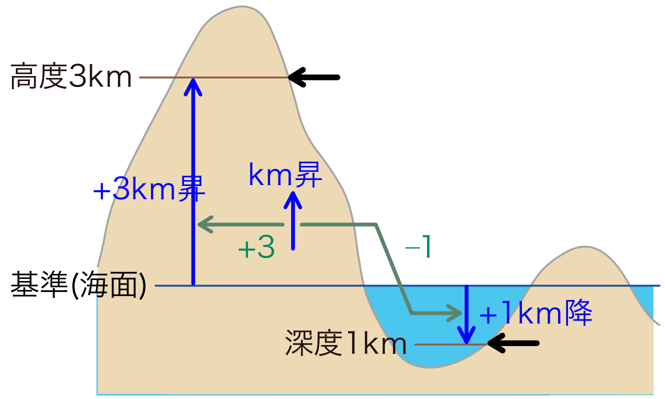




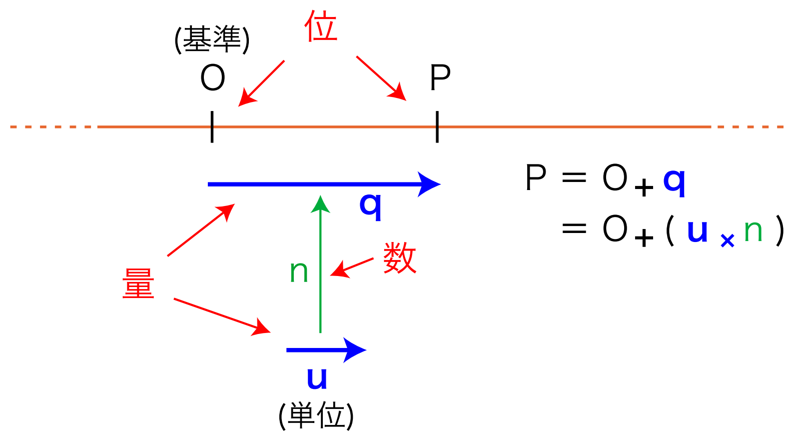








両者には，つぎの形式を見ることができます：



「$\mathrm{O}_{+}\,\mathrm{q}$」は「Oにqを作用」と読み，
「位置Oからqだけシフト / 移動」の意味。

4.1.2　直線上の位置の表現——正負の数の使用

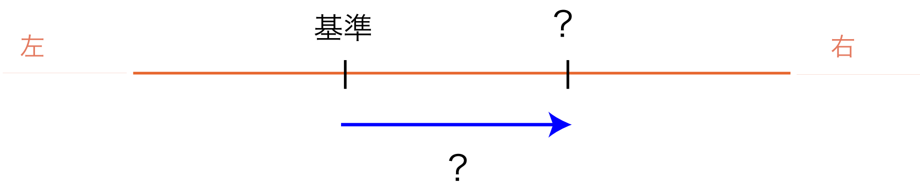
直線上の位置の表現を考えましょう。
数学の方法は，以下のようになります。

1. 位置の表現 (1)

　直線上の位置 (直線上の一点の位置) を表す (定位) には‥‥

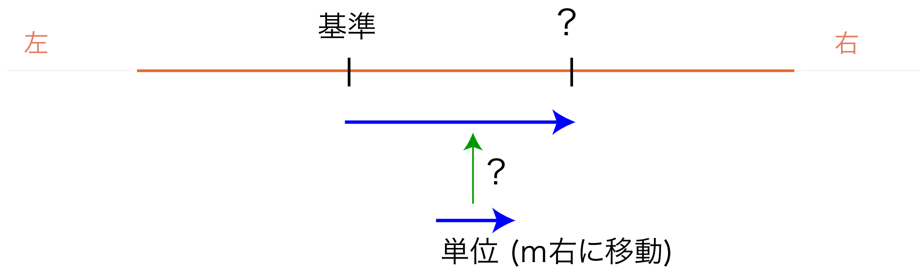
　「基準」を任意にとって：

　「基準からどれだけの変位 (移動)」で表す：

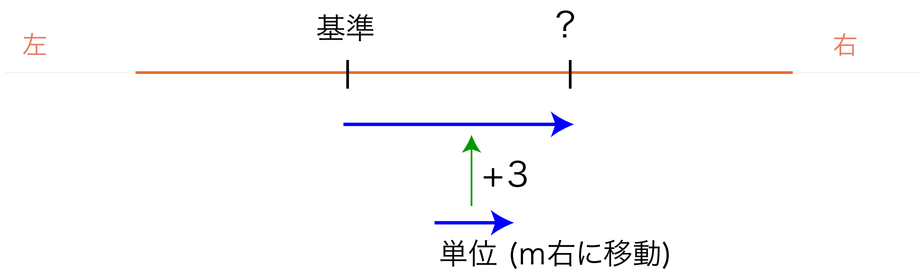


2. 変位 (移動) の表現

　これは，量の表現 (既知) であり，「単位の何倍」で表すものになる：

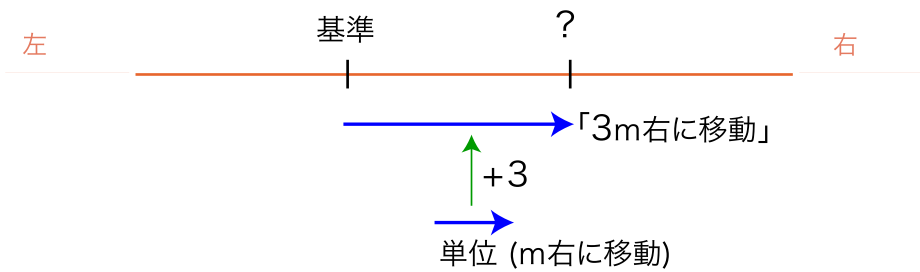


　つぎのように表せたとする：

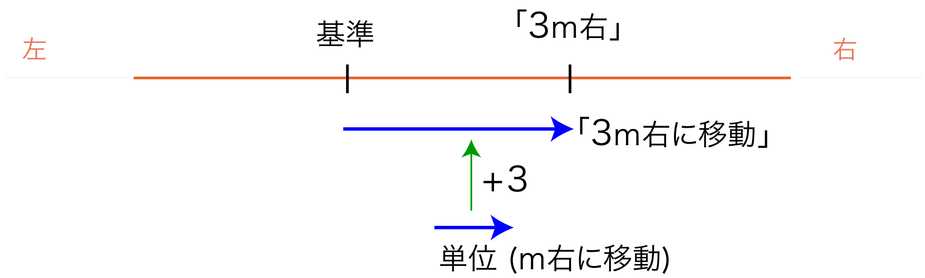


3. 位置の表現 (2)

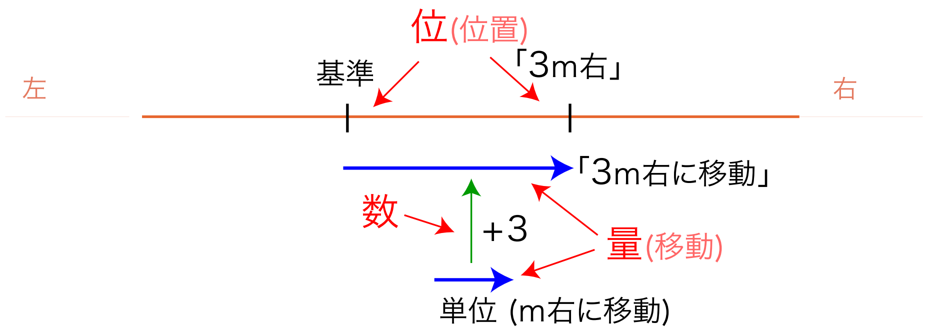
　位置の表現 (1) と変位 (移動) の表現を合わせる：



　そして，つぎの表現を得る：



ここには「位・量・数」の形式が認められます：

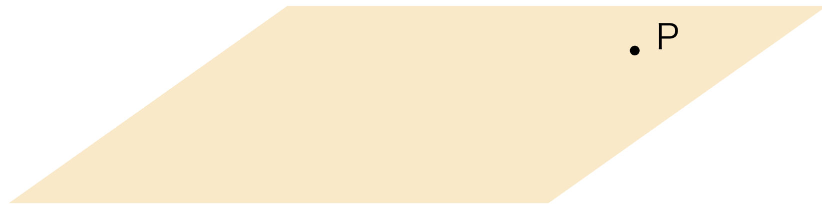


4.1.3　平面上の位置の表現——複素数の使用

平面上の位置の表現を考えましょう。
数学の方法は，以下のようになります。

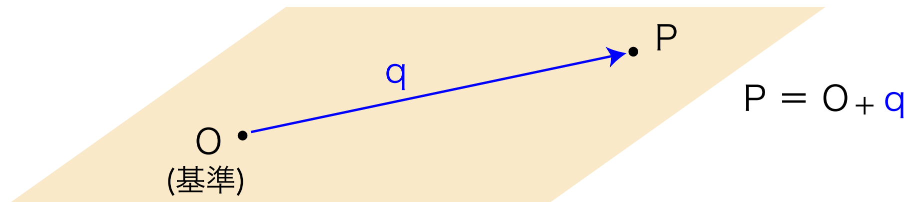
1. 位置の表現 (1)

平面上の位置 (直線上の一点の位置) を表す (定位) には・・・・



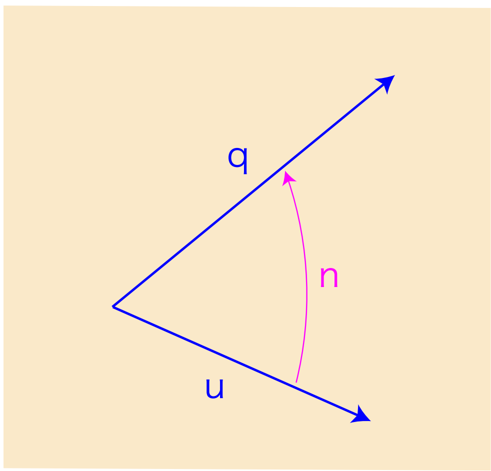
「基準」を任意にとって：

「基準からどれだけの変位 (移動)」で表す：



2. 変位 (移動) の表現

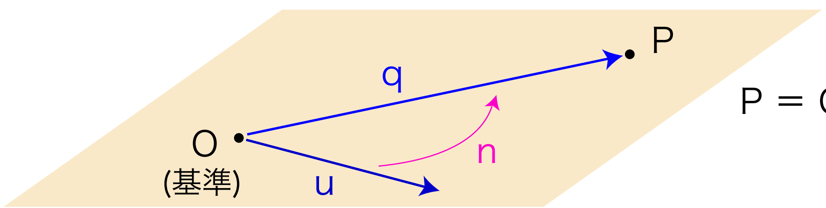
これは，量の表現 (既知) であり，「単位の何倍」で表すものになる。
つぎのように表せたとする (n は複素数) :



$$q = u \times n$$

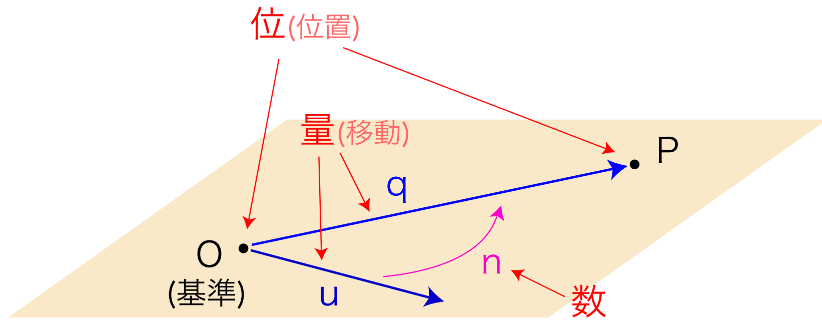
3. 位置の表現 (2)

位置の表現 (1) と変位 (移動) の表現を合わせて，つぎの表現を得る :



$$P = O + u \times n$$

ここには「位・量・数」の形式が認められます :



4.1　位の構造

4.2.1　位の構造—— 位の普遍対象

4.2.2　位の算法

4.2.1　位の構造—— 位の普遍対象

数 (N, +, x) からは，量形式 ((N , ＋), ×, (N , ＋ ,×)) が導かれます。そしてこれからさらに，位の形式 / 普遍対象

(N , ＋ , ((N , ＋), ×, (N , ＋ ,×)))

が導かれます。——量形式 ((N , ＋), ×, (N , ＋ ,×)) に集合のＮと加法の＋を加えたものが，位形式です。

すなわち，(N , ＋ , ((N , ＋), ×, (N , ＋ ,×))) と同型な系

(P , $_{+}$, ((Q , $\boldsymbol{+}$), $_{\times}$, (N , ＋ ,×)))

を，位と定義します。

ここで同型対応

$$g : P \longrightarrow N$$

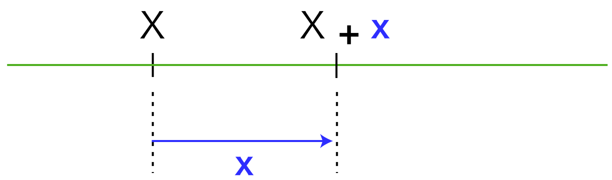
$$f : Q \longrightarrow N$$

の条件は，つぎのようになります：

1. g は１対１対応
2. g (X $_{+}$ x) ＝ g (X) ＋ f (x)
3. f は１対１対応
4. f (x $\boldsymbol{+}$ y) ＝ f (x) ＋ f (y)
5. f (x $_{\times}$ n) ＝ f (x) × n

4.2.2　位の算法

位の算法は，位に対する量の作用「**+**」のただ一つです。
位のシフト（「ずらし」）が，これのイメージになります：



位が数 (N, +, x) に対する (N , + , ((N , +), ×, (N , + ,×))) と同型な系ということには，つぎの法則が含意されています：

$$(X + x) + y = X + (x + y)$$

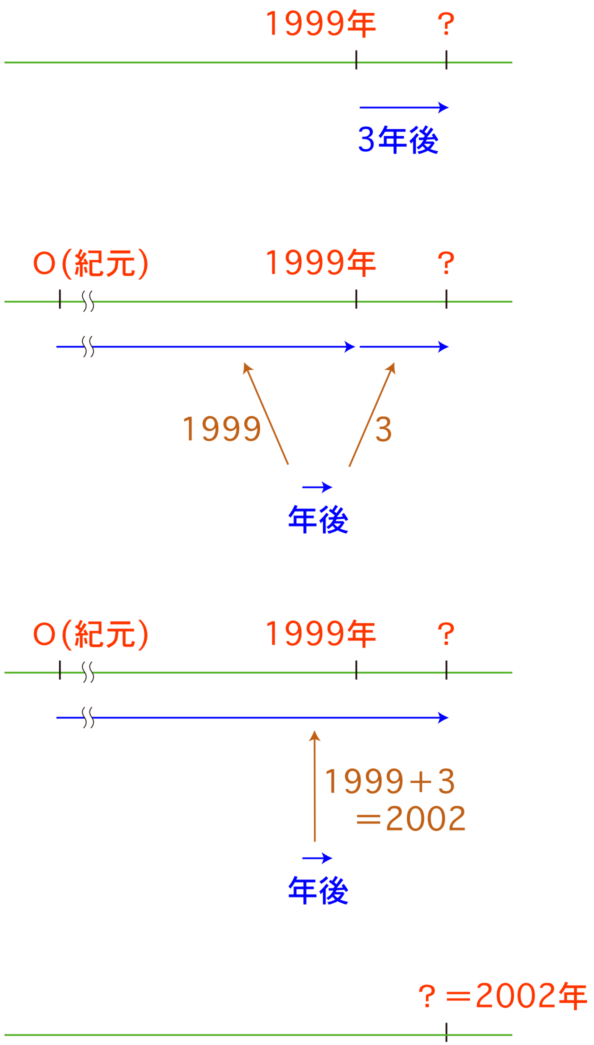
4.3　位計算

4.3.1「西暦 1999 年の 3 年後は ?」

4.3.2「水深 200m から 100m 降下は，水深何m ?」

4.3.1「西暦 1999 年の 3 年後は ?」

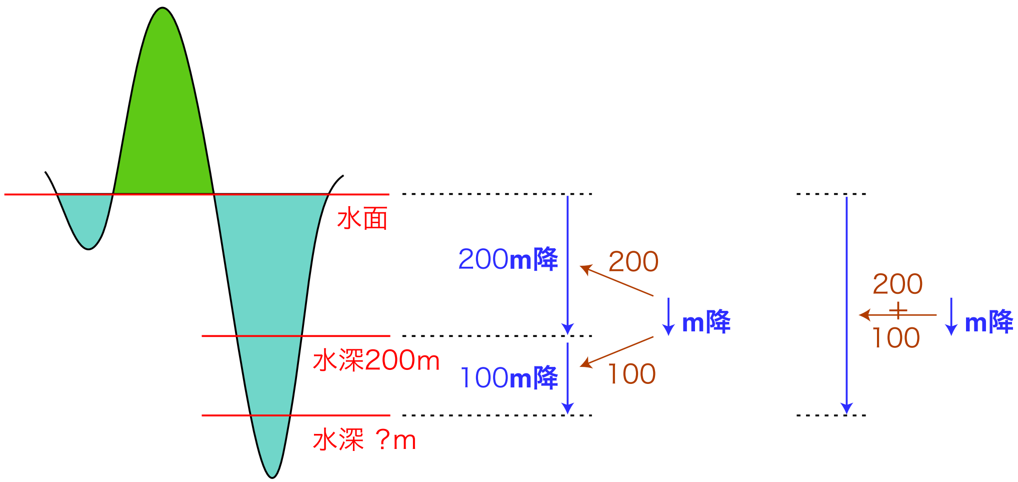
「西暦 1999 年の 3 年後は？」の計算は，つぎのようになります：



　西暦 1999 年の 3 年後
= (紀元 + (年後 × 1999)) + (年後 × 3)
= 紀元 + ((年後 × 1999) + (年後 × 3))
= 紀元 + (年後 + (1999 + 3))
= 紀元 + (年後 × 2002)
= 西暦 2002 年

4.3.2「水深 200m から 100m 降下は，水深何m ?」

「水深 200m から 100m 降下したら，水深何m ？」の計算は，つぎのようになります：



水深 200m から 100m 降下
＝ (水面 + (m 降 × 200)) + (m 降 × 100)
＝ 水面 + ((m 降 × 200) ＋ (m 降 × 100))
＝ 水面 + (m 降 × (200 ＋ 100))
＝ 水面 + (m 降 × 300)
＝ 水深 300m

おわりに

「「数と量」の数学」のシリーズとして，これまでに

『いろいろな数がつくられるしくみ』
『いろいろな数が「数」であること』
『四元数』

を作成してきましたが，本テクスト

『量計算の論理』

がこれらに加わり，そして準備中の

『「数とは何か？」への答え』
『量と線型空間の近さと違い』

が加わると，「数と量」の数学を内容的にだいたいカバーすることになります。

学校数学で「数と量」の授業設計をする場合，本来これらが主題研究の内容になるわけです。この内容の大部であることを見るとき，授業づくりの生半可なことでないことが痛感されてきます。

しかも，学校数学の「数と量」は，数学の「数と量」とは別物になっています。よって授業づくりでは，この二つの間に折り合いをつけるという作業が，さらに必要になってきます。

学校数学の「数と量」が数学の「数と量」とは別物であることについては，これまでつぎのシリーズで論じてきています：

『数は量の比──「数は量の抽象」ではない』
『量とは何か？──学校数学の「量」と数学の「量」』
『「かけ算の順序」の数学』

また，現在

『学校数学はmを「1 m」と言わせる』

を準備中です。
上述の数学テクストと併せて，これらの学校数学テクストにも目を通してみてください。

(2010-01-09)

宮 下 英 明（みやした ひであき）

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。所属学会：日本数学教育学会

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための
「数」がわかる本 数学編 (5)

量計算の論理

2011-01-09　アップロード

著者・サーバ運営　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

---

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp