図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「数」の数学 対 学校数学 (1)

数は量の比
「数は量の抽象」ではない

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」の数学対学校数学 (1)

数は量の比
「数は量の抽象」ではない

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている

数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」
—— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？ ——

を PDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は，「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの，＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの１になるものです。

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの趣旨は，読者が学校数学の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは，＜「数」がわかる本＞シリーズに後続する内容になっています。
学校数学の「数」は，数学の「数」とは違っています。特に，学校数学の「数」は，数学になっていません。学校数学の「数」に対するときは，このことを理解している必要があります。そして，このことの理解には，数学の「数」の理解が含まれるわけです。

本書を読むためには，その中の特に『いろいろな数がつくられるしくみ』『「数とは何か？」への答え』の両方に目を通しておくことが必要です。
本書の中でも数学の「数」に言及・解説していますが，それはあくまでも，数学の「数」を改めて確認するという趣旨のものです。

「「数」がわかる本」シリーズは，現在かなり大部になっています。そこで，この内容の＜早わかり＞としてつぎのテクストを用意していますので，利用してください：

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

＜「数」がわかる本＞シリーズ （数学の「数」）

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズ （イデオロギーの「数」）

- 数は量の比 —「数は量の抽象」ではない （本テクスト）
- 量とは何か？—学校数学の「量」
- 「分数のかけ算・わり算」の数学と学校数学
- 「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

＜「かけ算の順序」論争解説＞シリーズ （モンスターの「数」）

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

目次

0.　導 入

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

0.0　はじめに

学校数学の「数と量」領域の指導は，やっかいである。
理由は，その内容が数学になっていないからである。

「学校数学が数学になっていない」というのは，奇妙に感じられるかも知れないが，歴史の悪戯といった感じで，このようなことは現に起こる。
実際，学校数学をつくるのは，人である。その立場に立った者は，自分の想っている「数学」で，学校数学をつくる。その者のもっている「数学」が数学とズレていれば，数学の体 (てい) をなしていない学校数学がつくられてしまう。
そして，いったんつくられた学校数学は，おかしなところがあっても，変えにくい。既にやってきてしまったことに対し，「あれはおかしかった」をいまから言うことは，なかなかできない。

学校数学の「数」の指導内容は，「数は量の抽象」の立場でつくられている。
一方，数学では，「数は量の比」である。

戦後の数学教育の形成期に，「数は量の比」か「数は量の抽象」かの論争があった。「割合論争」と呼ばれる。
いまの学校数学におさまっているのは「数は量の抽象」であるから，このことから「逆算」すれば，「数は量の抽象」の方が正しいのでは？という気分が，この間，醸成されてきたことになる。

しかし，「数は量の抽象」は数学ではない。
これを数学として指導するとは，無理をするということである。

実際，学校数学の「数と量」領域の指導は，ひどく無理をしなければならない。
本論考は，このことを論じようとするものである。

本論考は，「数は量の比」の数学を論ずる。
この数学の素地が読者になければ，本論考を読むのはけっこうつらいかも知れない。この場合は，『「数とは何か？」への答え』を先に，あるいは併行して，読んでみてほしい。

本論考は，論点を拡散させないという理由から，「数は量の比」の数学の論にとどめる。特に，指導内容にしたときの内容構成・指導法の話へと論を進めることはしない (これについては，論考を別に立てて行うことにする)。

0.1　概要

学校数学では，「数は量の抽象」である。
「数は量の抽象」は，数学ではない。
数学は，「数は量の比」である。
この「数は量の比」の数学を，第１章で押さえる。

「数は量の抽象」の論においても，量の比としての数（「割合」）が現れるのを抑えることはできない。しかし，「数は量の抽象」の立場では，数は量でなければならないから,「割合」も量に解釈しなければならない。このときに，「１と見る」をやる。
「１と見る」は，量の比としての数を抑えるものにはならないが，「数は量の抽象」主義者は「１と見る」でうまくいってると思う。この思いが壊されずに済んでいるのは，「１と見る」の数学をきちんと考えることをしないからである。
このことを，第２章で論ずる。

「数は量の抽象」は，数学ではないが，数学的イデオロギーということは言える。これは「数は量の抽象」を立てるために，独特な論理を開発する。
この内容を第３章で論ずる。

学校数学は，「数は量の比」ではなく，「数は量の抽象」を択った。「数は量の抽象」の方が正しいように思えたからである。
数学を捨てて数学でない方を択んだ学校数学は，数学でないものを数学として教えるという無理を行う者になる。

学校数学が数学であろうとすれば，「数は量の比」を択らねばならない。
しかし現実は，このような動きが起こる力学を欠いている。
このことを，第４章で論ずる。

0.2 鳥瞰図 (「積・商の立式」のロジック)

本論考は,「数は量の比」(数学) と「数は量の抽象」(学校数学) の対比を行うものである。読者は, 両者の違いを端的に示すビジュアルなイメージを最初にもてれば, 本論考がよみやすくなるだろう。そこで,「鳥瞰図」の趣で,「積・商の立式」のロジックをここで示す。

ただし, ここで示すのは「数は量の比」の鳥瞰図である。
「数は量の抽象」の鳥瞰図を示すことは無理なので, 読者は, いまは, 自分がかつて学校で勉強させられた数が「数は量の抽象」なのだと思っていただければよい。

「数は量の比」の鳥瞰図を簡単に示せるのは, これが数学であるからだ。数学 (一般に科学) は,「最終的な簡単に行き着く」を方法にする。数学は, 用語や修辞を削り, 最終的な構造を実現する。だから, 数学になったものを鳥瞰図に示すことは簡単である。
「数は量の抽象」は, これとは事情が異なる。これの「鳥瞰」は, 一つの文化 / 邑の鳥瞰になる。これは, つくるのも難しいし, つくっても簡単な図にはならない。

さて, 積・商が立式されるときの数学 (「数は量の比」) のロジックを, つぎの A, B, C の3タイプで見ていく。

A.「○g (グラム) の△倍は何g?」の問題で,「何」に対し「○ × △」が立式される論理
「○gを何倍したら△g?」「何gを○倍したら△g?」の問題で,「何」に対し「△ ÷ ○」が立式される論理

B.「隣り合う2辺が○m (メートル) と△mの長方形の面積は何 m^2?」の問題で,「何」に対し「○ × △」が立式される論理
「隣り合う2辺が○mと何mの長方形の面積が△m^2」の問題で,「何」に対し「△ ÷ ○」が立式される論理

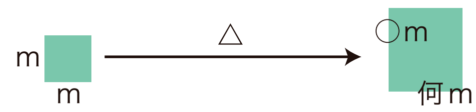
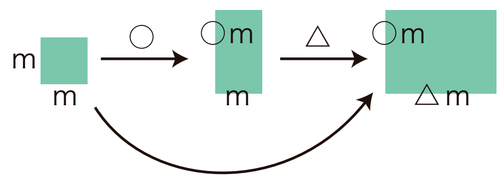
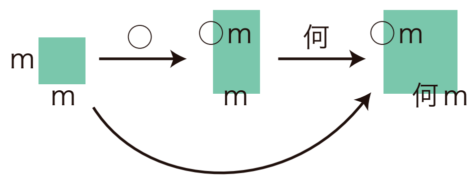
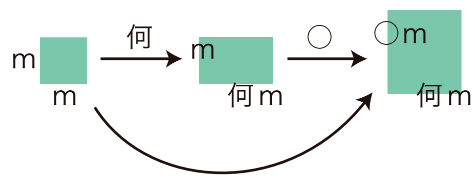
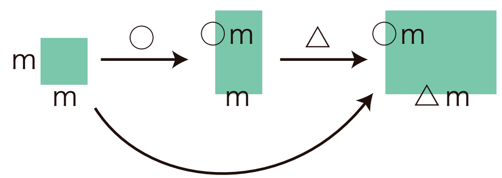
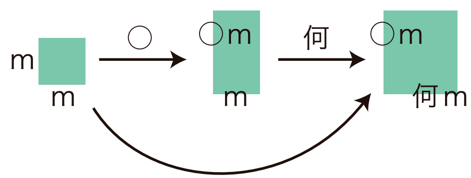
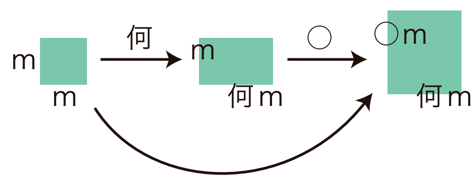
C.「○m / 秒 (メートル毎秒) で△秒間移動したときの距離は何m?」の問題で,「何」に対し「○ × △」が立式される論理
「○m / 秒で何秒間移動のとき距離が△m?」「何m / 秒で○秒間移動のとき距離が△m?」の問題で,「何」に対し「△ ÷ ○」が立式される論理

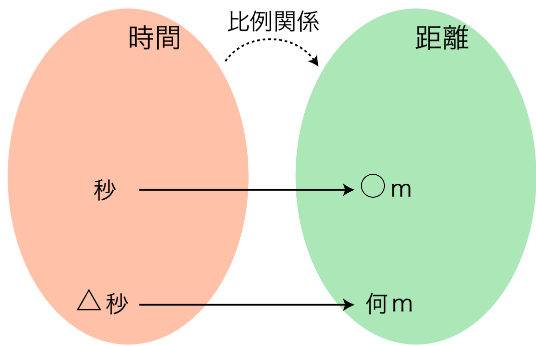
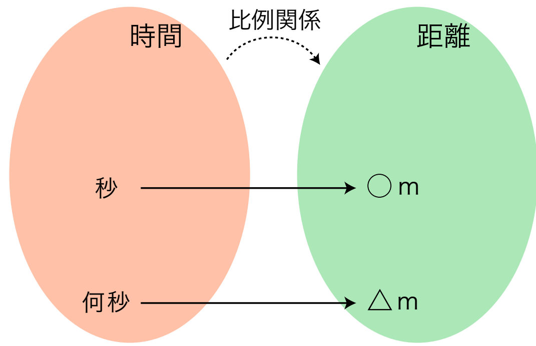
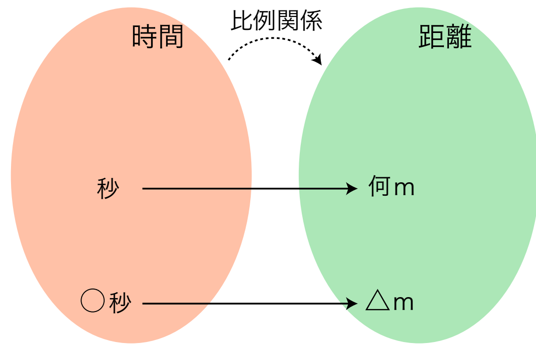
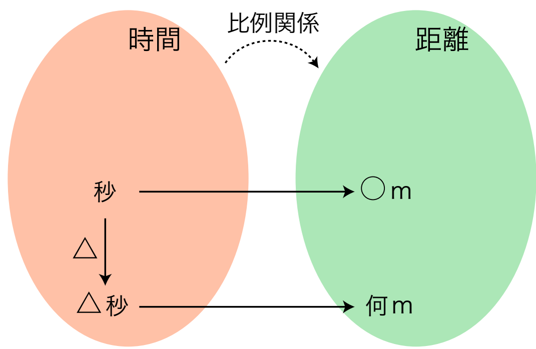
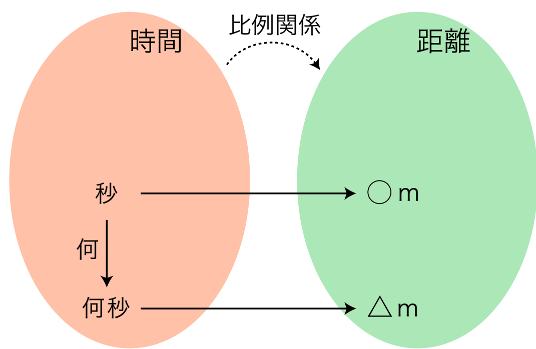
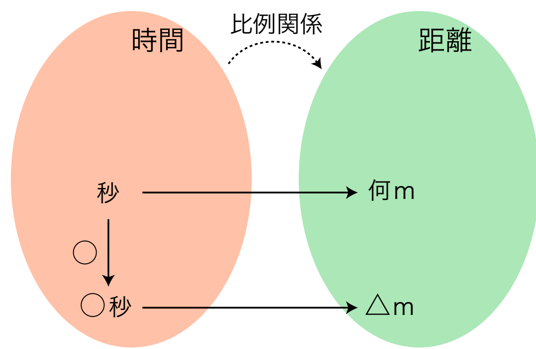
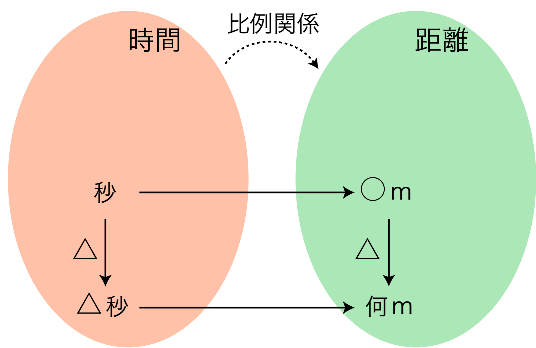
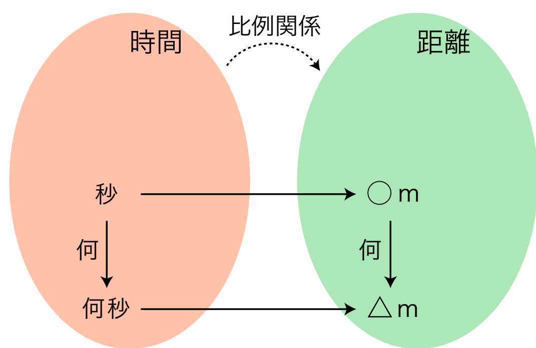
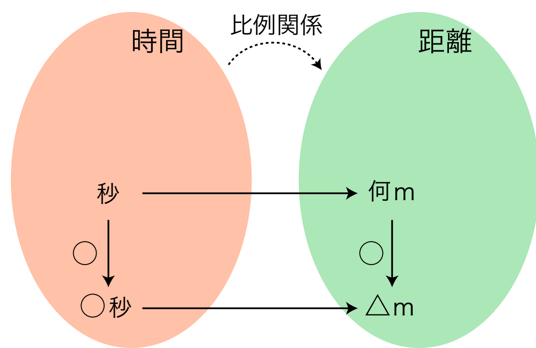
積・商の立式に至る推論で使われるのは, つぎのこと (だけ):

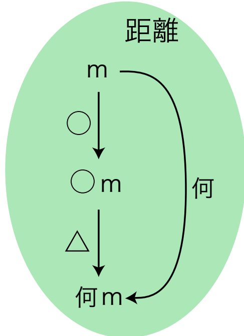
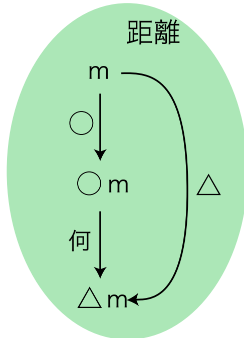
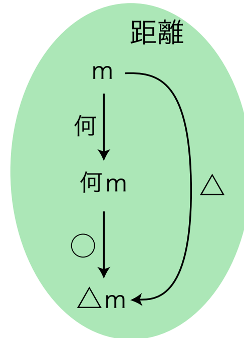
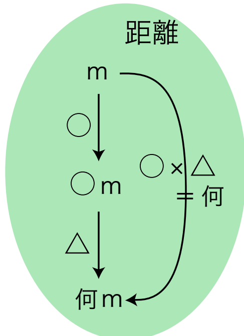
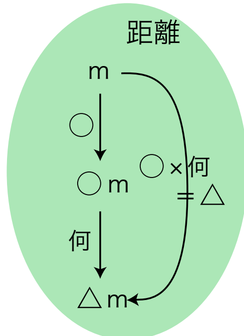
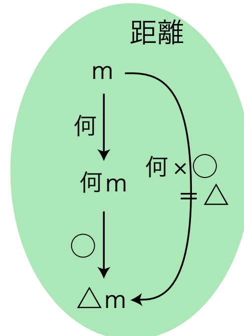
1. 「○単位」は,「単位の○倍」の簡略表記。
2. 「×」の文法:「(量qの○倍) の△倍」→「量qの (○ × △) 倍」(変形規則)
3. 「÷」の文法:「○と掛けて△になる数」→「△ ÷ ○」(変形規則)
(「÷」は, 積に交換法則が成り立つ数で定義される。)
4. 長方形の一辺の長さを固定したとき, 隣の一辺の長さと長方形の面積は比例する。
5. 速さ (速度) の定義: 時間と距離の間の比例関係

見ての通り, 学校で授業している内容 (「数は量の抽象」) とは似ても似かない:

問題	○gの△倍は何g？	○gを何倍したら△g？	何gを○倍したら△g？
問題を図式化	$\text{○g} \xrightarrow{\text{△}} \text{何g}$	$\text{○g} \xrightarrow{\text{何}} \text{△g}$	$\text{何g} \xrightarrow{\text{○}} \text{△g}$
「□g」を分析	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\text{○}"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & \text{○g} \arrow[r, "\text{△}"] & \text{何g} \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\text{○}"] \arrow[rr, bend right, "\text{△}"'] & \text{○g} \arrow[r, "\text{何}"] & \text{△g} \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "\text{△}"'] & \text{何g} \arrow[r, "\text{○}"] & \text{△g} \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\text{数}_1"] \arrow[rr, bend right, "\text{数}_1 \times \text{数}_2"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\text{数}_2"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\text{○}"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & \text{○g} \arrow[r, "\text{△}"] & \text{何g} \end{tikzcd}$ 何 ＝○×△	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\text{○}"] \arrow[rr, bend right, "\text{△}"'] & \text{○g} \arrow[r, "\text{何}"] & \text{△g} \end{tikzcd}$ △＝○× 何	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "\text{△}"'] & \text{何g} \arrow[r, "\text{○}"] & \text{△g} \end{tikzcd}$ △＝ 何 ×○
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝○×△	何＝△÷○	

問題	「隣り合う2辺が ○m と △m の長方形の面積は 何m^2？	「隣り合う2辺が ○m と 何m の長方形の面積が △m^2？	
問題を図式化			
「□m」を分析 ＋ 長方形の一辺の長さを固定したとき, 隣の一辺の長さと長方形の面積は比例	 何	 △	 △
「×」の文法 $量_a \xrightarrow{数_1} 量_b \xrightarrow{数_2} 量_c$ $数_1 \times 数_2$	 何 ＝○×△	 △＝○× 何	 △＝ 何 ×○
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝○×△	何＝△÷○	

問題	〇m/秒で△秒間移動したときの距離は何m?	〇m/秒で何秒間移動のとき距離が△m?	何m/秒で〇秒間移動のとき距離が△m?
問題を図式化			
「□秒」を分析			
比例関係の意味			

「□m」を分析			
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1\times数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$			
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝○×△	何＝△÷○	

1.　数学では，「数は量の比」

1.0　要旨

学校数学は，これまでずっと「数は量の抽象」であり，「数は量の比」ではない。一方，数学は「数は量の比」であり，「数は量の抽象」は数学ではない。
すなわち，学校数学の「数と量」の主題領域が，これまでずっと数学でないままになっている。

しかし，学校数学の「数・量」が数学の「数・量」ではないということは，存外，知られていない (意識されていない)。そして，概念整理ができていない状態で，「数・量」の数学教育が議論になる。

学校数学の「数･量」が数学の「数･量」ではないことは，数学の「数･量」の押さえをやれば，直ちにわかる。
翻って，学校数学の「数・量」が数学の「数・量」でないことが知られていない (意識されていない) ということは，数学の「数・量」の押さえがきちんとされてこなかったということである。 ――数学教育的に興味深いのは，むしろこの点である。

数学の「数・量」の押さえがきちんとされてこなかったのは，自分の「数・量」観に自足し，これを疑う契機がもたれなかったからである。
自分の「数・量」観に自足するのは，「数・量」を自明とする意識があるからだ。
実際，自分が自足している「数・量」観は，小学算数の自然数と個数である。
「*いまの自分には，簡単すぎて問題にもならない*」というわけだ。

「数は量の抽象」は，このレベルの知力と親和的なものになる。
「数は量の抽象」が棲めるのは，このレベルの知力である。
すなわち，「数・量」が小学算数の自然数と個数より先に進むと，「数は量の抽象」は持ち堪えることのできないものになる。

学校数学の「数･量」が数学の「数･量」ではないことは，数学の「数･量」の押さえをやれば，直ちにわかる。それは，「自然数の先の数 (分数，正負の数，複素数) を扱えさえすれば，それで済む」ということである。

ということで，本章において，「数・量」の数学の押さえを簡単に行うことにする。
――話をわかりやすくするために，学校数学の「数・量」と対比させつつ。

1.1　学校数学の ×, ÷ の用法は，数学ではない

1.0　要旨

学校数学の「数・量」が数学の「数・量」ではないことを見る手始めとして，つぎのものをここで押さえる：

1.「＜倍の合成＞を構造とする量計算」の数学
　　(→ §1.1.1 ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法)
2. これと比較して，学校数学のやり方
　　(→ §1.1.2「割合の問題の解法」(「数は量の抽象」の立場))

そこで注目して欲しいのは，「×・÷」の文法である。
「×・÷」は，数一般に対して定義される (註)。
一方，「数は量の比」の「×・÷」は，自然数・個数から先に進むと，理屈をつけられなくなる。

註：ただし,「÷」は, 積が可換な数において定義される。──例えば, 積が可換でない四元数では，定義されない。

1.1.1 ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法

つぎの３つの問題の解法を確認する：

「２ｇの何倍が６ｇか？」
「２ｇの３倍は何ｇか？」
「何ｇの３倍が６ｇか？」
（「ｇ」は，重さの「グラム」）

解法は，右の表のようになる：

問題	「２ｇの何倍が６ｇか?」	「２ｇの3倍は何ｇか?」	「何ｇの3倍が６ｇか?」
問題を図式化	$2\mathrm{g} \xrightarrow{\text{何}} 6\mathrm{g}$	$2\mathrm{g} \xrightarrow{3} \text{何}\mathrm{g}$	$\text{何}\mathrm{g} \xrightarrow{3} 6\mathrm{g}$
「○g」を分析	$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 2\mathrm{g} \arrow[r, "\text{何}"] & 6\mathrm{g} \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & 2\mathrm{g} \arrow[r, "3"] & \text{何}\mathrm{g} \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{何}\mathrm{g} \arrow[r, "3"] & 6\mathrm{g} \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\text{数}_1"] \arrow[rr, bend right, "\text{数}_1 \times \text{数}_2"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\text{数}_2"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6 = 2 \times \text{何}"'] & 2\mathrm{g} \arrow[r, "\text{何}"] & 6\mathrm{g} \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "\text{何} = 2 \times 3"'] & 2\mathrm{g} \arrow[r, "3"] & \text{何}\mathrm{g} \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "6 = \text{何} \times 3"'] & \text{何}\mathrm{g} \arrow[r, "3"] & 6\mathrm{g} \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $m \times ○ = ○ \times m = n$ 「$n \div m$」	何 ＝ $6 \div 2$	何 ＝ 2×3	何 ＝ $6 \div 3$

1.1.2「割合の問題の解法」(「数は量の抽象」の立場)

「＜倍の合成＞を構造とする問題の解法」(§1.1.1) で，つぎの３つの問題の解法を示した：

　　　「２ｇの何倍が６ｇか？」
　　　「２ｇの３倍は何ｇか？」
　　　「何ｇの３倍が６ｇか？」
　　　　(「ｇ」は，重さの「グラム」)

これに対比して，「数は量の抽象」の立場に立つ「割合の問題の解法」を，下の表に示す。

この「解法」は「数は量の抽象」の立場に因っているわけであるが，これについて簡単に説明しておく。

「数は量の抽象」の立場では，数は量である。
「割合」も，量として定義されねばならない。
そこで，下の表にあるような「割合」の定義になる。

問題	「2gの何倍が6gか?」	「2gの3倍は何gか?」	「何gの3倍が6gか?」
「割合」的表現	２gに対する6g の割合は?	２gに対する何g の割合が3か?	何gに対する6g の割合が3か?
もとにする量を 「1と見る」	2g　　6g ↓ 1	2g　　何g ↓ 1	何g　　6g ↓ 1
比較する量の 抽象になる数 が割合になる	2g　　6g ↓　　↓ 1　　何	2g　　何g ↓　　↓ 1　　3	何g　　6g ↓　　↓ 1　　3
「比の3用法」 (公理) の適用	第1用法より: 何 ＝ 6g ÷ 2g	第2用法より: 何g ＝ 2g × 3	第3用法より: 何g ＝ 6g ÷ 3
数の「×・÷」は 量の「×・÷」の 抽象	何 ＝ 6 ÷ 2	何 ＝2 × 3	何 ＝ 6 ÷ 3

特に,「＜倍の合成＞を構造とする問題の解法」(§1.1.1) で見た「倍」のつぎのような表記には, ならない：

$$2\,\mathrm{g} \xrightarrow{\text{何}} 6\,\mathrm{g} \qquad 2\mathrm{g} \xrightarrow{3} \text{何}\,\mathrm{g} \qquad \text{何}\,\mathrm{g} \xrightarrow{3} 6\,\mathrm{g}$$

$$\mathrm{g} \xrightarrow{2} 2\mathrm{g} \qquad \mathrm{g} \xrightarrow{6} 6\mathrm{g} \qquad \mathrm{g} \xrightarrow{\text{何}} \text{何}\,\mathrm{g}$$

「比の３用法」は, 事物の存在法則のような位置づけの＜公理＞である。
実際,「数は量の抽象」の立場は, 量を実体概念にする。「比の３用法」を記述している「×・÷」も実体概念である。これを数学的に定式化しようとしたら, 没論理ないし循環論法になる。

「何＝６ｇ ÷ ２ｇ, 何ｇ＝２ｇ × ３, 何ｇ＝６ｇ ÷ ３」から「何＝６÷ ２, 何＝２× ３, 何＝６÷ ３」を導くところも, 数学的には没論理である。特に, 記号の混乱が, 先ず退けられるものになる。
すなわち, 数学では, 量に対する数を, 量の作用域として定義する。「×」は, 数の「内算法 (演算)」である。量の内算法として定義されるのは, 加法のみである。
しかし,「数は量の抽象」の立場では, 量には「積」がある。
「何＝６÷ ２, 何＝２× ３, 何＝６÷ ３」も, 量の演算として意識されている。

1.2「数・量」の数学

1.2.0　要旨

ひとは何かを考えるとき，その何かに対する自分の想いで考える。
「数」もこのように考えられてしまう。
実際，「数」を論ずるといいながら自然数を論じているのが，よくあるパターンである。

そしてこのレベルで，「数・量」に関する主題解釈や教材の議論や論争をやってしまう。
この種の議論や論争は不毛なものになる。
構造的に狂いがあるわけだから，理の当然として，不毛になる。

逆に，自分を閉じこめている自然数の殻を破り，分数，正負の数，複素数へと視界を広げれば, 不毛な議論や論争の外に立てることになる。

1.2.1　数のいろいろは，量のいろいろに応じている

数は２量の比を表現するものとしてつくられる。そして，食材によって包丁を替えるように，量に応じてつごうのよい数がつくられる。

自然数を使う量では，「個」と呼ばれる「部分を考えない量」を想定したが，「任意に部分を考えられる量」を扱いたくなったときに，分数がつくられる。

さらに，正逆２方向（１次元自由）の量（イメージとしては直線上のベクトル）を扱いたくなって，正負の数がつくられる。
２次元自由の量（イメージとしては平面上のベクトル）を扱いたくなって，複素数がつくられる。
３次元自由の量を扱いたくなって，四元数がつくられる。
——といった具合である。

以下，「数と量」のカテゴリーがどのようであるかを押さえておく。
ここでは，「数・量のカテゴリーは一通りでない」ということを見られたい。

「数と量」のカテゴリーをここで押さえておくことの趣旨は, 自分が「数と量」としているものが，全体のどの辺りにあるのかを知るということである。実際，ひとはたった一つの「数と量」を論じて，「数と量」の世界を論じているつもりになるものであるから。

数学では，量をつぎのカテゴリー区分でそれぞれ対象化していることになる：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ			
	大きさと１次元方向			
	大きさと２次元方向			
	⋮			

例えば，「一皿２つのリンゴが３皿」は，「離散―大きさ」のカテゴリーでやっていることになる。

ただし，このうち「意味のあるカテゴリー」として実際に対象化しているのは，つぎのものである：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	○	○	○
	大きさと１次元方向	○	○	○
	大きさと２次元方向			○
	大きさと４次元方向			○
	⋮			⋮

このカテゴリーを実現するものは，数（系）である。
複数のカテゴリーがありますので，複数の数（系）が必要になる。これをつぎのようにつくっていく――矢線の意味は「導出・拡張」である：

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然数}(\mathbb{N},+,\times) \arrow[d] & & \\
\text{整数}(\mathbb{Z},+,\times) \arrow[r] & \text{有理数}(\mathbb{Q},+,\times) \arrow[r] & \text{実数}(\mathbb{R},+,\times) \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
& & \text{複素数}(\mathbb{C},+,\times) \arrow[d] \\
& & \text{四元数}(\mathbb{H},+,\times)
\end{tikzcd}
$$

数学の「量」は，形式である。この形式を，数（系）を素材にしてつくる：
(→『「数とは何か？」への答え』§ 数が量をつくる)

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$	$((\mathbb{Q}^+,+),\times,(\mathbb{Q}^+,+,\times))$	$((\mathbb{R}^+,+),\times,(\mathbb{R}^+,+,\times))$
	大きさと１次元方向	$((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$	$((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$	$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$
	⋮			⋮

そして以降，「数」を「量の比」として使っていくことになる。

上の表から特に「比」の部分を取り出したのが，つぎの表である――
これは，＜量のカテゴリー＞と＜比として使われる数（系）＞の対応を示す表になる：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$(\mathbb{N},+,\times)$	$(\mathbb{Q}^+,+,\times)$	$(\mathbb{R}^+,+,\times)$
	大きさと１次元方向	$(\mathbb{Z},+,\times)$	$(\mathbb{Q},+,\times)$	$(\mathbb{R},+,\times)$
	大きさと２次元方向			$(\mathbb{C},+,\times)$
	大きさと４次元方向			$(\mathbb{H},+,\times)$
	⋮			⋮

1.2.2　数は「量の比」であり，「量の抽象」ではない

２量の比を表現する数は，「もとにする量のどれだけ」という形の量表現に使われるものになる。このときの「どれだけ」のところに数がくる。

「量ａに対する量ｂの比はｎ」は「ｂはａのｎ倍」に転じる。
「割合」「比」「倍」は，<u>同じことの異なる言い回し</u>であり，これの表現が数である。

「割合論争」(§3.2.2「数は量の抽象」の歴史的背景）に引き寄せて言えば，数は「比」の意味の「割合」であり，「割合」以外ではない。

1.2.3　量は「外延量と内包量」ではない

数の和は，「ａのm倍の量とａのｎ倍の量を合わせると，ａの○倍」の「○」を表現する対象式として導入される。 ——自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥ の和は，この条件を満たすように定義される。

(ａのm倍) と (ａのｎ倍) の和 ＝ ａの○倍

「m＋ｎ」

よって，数を使うことが前提の量は，はじめから加法を考えている。

特に，「速さ」も，加法を考える。実際，物理ではあたりまえに速さの足し算をする。 (「*速さの違う汽車は連結できない*」という話の落ちは，「*速さは足せない*」ではない。)

1.2.4　量は数を通して対象化される

「割合論争」(§3.2.3) では，「数は量の抽象」の側から「数は抽象，量は具体」(§3.1.1) が言われた。「量には内包量と外延量がある」(§3.1.2) もこの感覚で言われたことである。

しかし，「どれが量か？」と問われて「これが量だ」と指させるものは存在しない。「３メートル」は「３メートルのひも」のことではない。

また，３メートルの長さのものがこの世にあるかどうかに関係なく，「３メートル」を意識に対象化することはできる。思考は,「メートル」と数を素材にして，「長さ」という量を概念的に構築する。

つぎのように言うことができる：

「言語が存在をつくる」<u>と同じ意味で</u>「数が量をつくる」。

実際，量は，自然数を使うべく対象化すれば離散になり，分数を使うべく対象化すれば稠密になり，正負の数を使うべく対象化すれば正逆２方向になる。

「数が量をつくる」の数学は，「普遍対象 (universal object」の話になる。 ——これについては,「「１と見る」の数学」(§2) の中で論ずる。

1.2.5　参考：「数」の数学的定義

算数では，自然数と分数の二種類の数を扱う。中学数学になると「正負の数」という主題名で，整数，有理数の登場となり，さらに「平方根」の主題名で実数が登場する。高校数学では，実数の主題を進める一方で, あらたに複素数を主題化する。大学の数学の専門課程では「四元数」の授業があるかも知れない。

これら「数」が「数」の名で一つに括られるのは，これらに同じ＜形＞が見られているからである。
数学的には，「数」はこの＜形＞を指すことばである。

・歴史的には，「「数」の＜形＞の実現」という意識に導かれていろいろな数がつくられてきたわけではない。歴史はつぎのようになる：
1. いろいろな数が，それぞれ何らかの目的に導かれて，つくられる。
2. いろいろな数がつくられてきたところで，これらを見渡す。そこから，共通する＜形＞が浮かんで見えてくる。
3. この形を定式化し，「数」の定義とする。

・「数」の範疇を拡げるほど，「数」の条件は弱まる。例えば,
o 複素数を考えることで，順序関係は「数」の条件でなくなる。
o 四元数を考えることで, 乗法の可換性は「数」の条件でなくなる。

一方，数の使用――特に，量処理における数使用――の根拠となる形式は，「数」の条件として堅持される。

以上のように考えるとき，「数」(自然数，分数，‥‥ といったそれぞれの系) は，おおよそつぎのように定義されるものになる：

「数」とは，集合Nとその上の二つの内算法＋，× でなる系 (N , ＋ ,×) で，つぎの条件を満たすものである：

1. ＋は結合的かつ可換.

2. × は結合的で，単位元 $1 \in N^*$ が存在する.

3. ＋と × の間に左右分配法則が成り立つ [註1]：

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

4. 各要素は，＋に関して可約；即ち,

$$a + b = a + c \quad \Longrightarrow \quad b = c$$

5. N^* の各要素は, × に関して左右可約；即ち，$a \in N^*$ に対し,

$$a \times b = a \times c \quad \Longrightarrow \quad b = c$$
$$b \times a = c \times a \quad \Longrightarrow \quad b = c$$

6. 任意の要素 a , b に対し，要素 c で，$a + c = b$ か $a = b + c$ となるものが存在する.

ここで N^* は，Nが零元０―― ＋に関する中立元――をもつときは

N＼{ 0} [註 2])，そうでないときはN自身。

単位元 1 の存在と条件 (4),(5) は，「数使用」の観点から要請される。（N，＋）[註 3] が群のとき，(4) はこれに含意される。また（N *,×）が群のとき，(5) はこれに含意される。また，× が可換のとき，(3) の条件式は第一式のみでよいことになる。

なお，要素 a に対し a ＋ a ＝ a が成り立つとき，a は零元である [註 4]。

(註 1)「加法」,「乗法」の呼称ないし＋，× の記号の使い分けは，それの用法に基づいている（＋は倍の和，× は倍の合成に使う）。一方，<u>形式だけを見ると</u>，両者の区別は専ら分配法則に拠っていることになる。即ち，

$$(x * y) \# z = x \# z * y \# z$$

の関係にある＊の方が加法（＋)，＃が乗法 (×) となるわけである。

(註 2) 一般に，集合 X とその部分集合 Y に対し，Y に属さない X の要素全体の集合を X＼Y で表わす。

(註 3) 数の系の構造は，＋，× で定義される代数的構造，順序関係≦で定義される順序構造，また位相構造，の組合せで，色々に考えられる。

(註 4) 任意の要素 b に対し，a ＋ b ＝（a ＋ a）＋ b ＝ a ＋（b ＋ a）。＋の可約性より，b ＝ b ＋ a。

1.3　数学の ×, ÷ の文法

1.3.1「わり算」は，数一般において定義される

「わり算」について「包含除・等分除」のことばが使われているときには，自然数が念頭にある。一方，「わり算」は数一般において定義される。

対象式としての「n ÷ m」は，「mとかけてnになる数」を意味する。

mとかける場合，順序に２通りでてくる。m × ◯＝n と ◯ × m＝n である。

◯を「n ÷ m」と表すということには，「×」が可換であるということが含意されている。

m×◯＝◯×m＝n

「n÷m」

数の論は，自然数，分数，正負の数，複素数，四元数，‥‥と進められるが，「×」の可換性は四元数になると「数の条件」ではなくなる。特に，対象式「n ÷ m」は四元数になると無意味になる (定義されない)。

1.3.2　わり算は「包含除と等分除」ではない

数は２量の比（「倍」）を表現する。そして，数の積は，「量ａのm倍のさらにｎ倍にあたる量は，ａの○倍」の「○」を表現する対象式として導入される。 ——自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥ の積は，この条件を満たすように定義される。

（ａの m倍）の ｎ倍 ＝ ａの ○倍

「m×ｎ」

「ｎ ÷ m」は「mとかけてｎになる数」を意味するが，「mとかけてｎになる」には m × ○＝ｎ と ○ × m＝ｎ の２通りがある。

数が自然数のとき, m × ○＝ｎ から「ｎ ÷ m」が立式される算数の問題は，つぎのようなものである：

１クラスm人なら，何クラスでｎ人？

また，○ × m＝ｎ から「ｎ ÷ m」が立式される算数の問題は，つぎのようなものである：

１クラス何人なら，mクラスでｎ人？

m × ○＝ｎ が立式される問題と ○ × m＝ｎ が立式される問題は，見掛けがかなり（劇的に ?）違ってくる。そこで，前者のタイプの問題に対するわり算の立式が伝統的に「包含除」と呼ばれ，後者の場合が「等分除」と呼ばれてきた。

数が分数のときは，m × ○＝ｎ から「ｎ ÷ m」が立式される問題は，つぎのようなものである：

mグラムの何倍がｎグラムか？

また，○ × m＝ｎ から「ｎ ÷ m」が立式される問題は，つぎのようなものである：

何グラムのm倍がｎグラムか？

確認：

「mグラムの○倍がｎグラム」から「m × ○＝ｎ」が導かれる論理はつぎのようになる：

mグラムはグラムのm倍。

よって，mグラムの○倍は，グラムのm倍の○倍。

積の定義から，グラムのm倍の○倍はグラムの（m × ○）倍。

mも○も量の比である。

この段階になると，「等分除・包含除」という対立のさせ方も無意味になる。

「ｎ ÷ m」に「包含除・等分除」の２つの意味があるのではない。「ｎ ÷ m」が立式される問題の構造には，m×○＝ｎ で応じるものと ○×m＝ｎ で応じるものの２通りがある。ここが要点である。
（→ §1.1.1 ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法）

「等分除・包含除」という擬似論理の用語は, ミス・リーディングである。

1.3.3「量 × 量」というものはない

「数は量の抽象」にすると，数の代数的構造を量に対しても考えねばならなくなる。特に，数には「×」があるので「量 × 量」をむりやり考え出そうとする。

われわれの方としては,「量 × 量」の言い回しに出会ったら,「変だぞ」「その × は何だ？そんなの知らないぞ」というふうにリアクションできるようでなければならない。

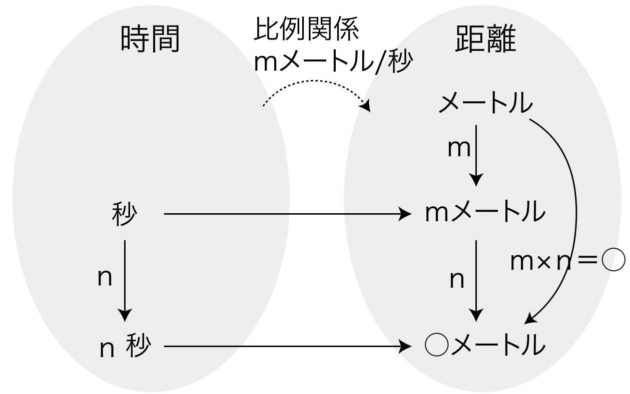
例えば,「速さ × 時間」を考えてみよう。速さと時間のイメージからは,「×」など想像のしようがない。想像できない「×」をどうして受けいれているのか？自らを欺しているのである。

実際,「速さ × 時間」を指導されようとしている生徒がそのとき知っている「×」は，数の「×」のみである。そして，数の「×」のみであることが正しい。「速さ × 時間」の「×」は，数の「×」を誤解したものである。

このときの数の「×」は，つぎのように導かれる：

距離の単位に「メートル」を，時間の単位に「秒」をとる。このとき速さの単位に「メートル / 秒」をとれば（「メートル / 秒」をとったときに限り），「m メートル / 秒で n 秒では，○メートル」の「○」に対して「m × n」が立式される。

理由：
「m メートル / 秒」の意味は，「秒にmメートルが対応する比例関係（時間と距離の間の比例関係）」である。
n 秒は秒の n 倍。
「比例関係」の定義により，時間の側の n 倍には距離の側の n 倍が対応する。よって，n 秒に対応する距離は，mメートルの n 倍。
「mメートル」は「メートルのm倍」。 よって,「mメートルの n 倍」は，メートルのm倍の n 倍。
数の積の定義より，これはメートルの（m × n）倍。



「速さ × 時間」の言い回しは, この論理的プロセスをとばして結果だけを拾ったものである。

しかし, ひとはこの「速さ × 時間」を, 自然法則かその種のものとして, すんなり受けいれる。ひとは,「速さ×時間」の「×」の意味には躓かない。——論理にこだわることができるようになるには，一定の学習が必要というわけである。

2.「1と見る」の数学

2.0　要旨

小学算数では，＜倍の合成＞を構造とする問題を「割合の問題」と定め，そしてこの問題解決に「１と見る」を用いることが，一般的である。
この「１と見る」は「数は量の抽象」の考え方から出ている。
(→ §1.1.2「割合の問題の解法」(「数は量の抽象」の立場))

＜倍の合成＞を構造とする問題の解決がこのやり方で「指導」されるとき，それは没論理であり，数学になっていない。
その授業が教員にも生徒にも苦しいものになるのは，内容が没論理だからである。苦しいのは, 内容が難しいということではない。 ──「わかった！」と言う生徒が出てきたら却って困るという代物なのである。

「１と見る」は，数学の主題になる。そしてこれは，「量としての数」の主題と同じである。この主題は，大学の数学で，代数的構造の同型そして線型空間論をだいぶやったところで出てくる。それを教えることが, 「１と見る」「量としての数」を数学として教えるということである。当然，初等段階で教えられるものではない。

> 「１と見る」は, 数学で言うと, 対象にしている量の系Ｑ (例えば, 重さ) の普遍対象 (universal object) を，この量の倍作用素として使っている数の系Ｎ (例えば，分数) を用いて構成する，という内容である。
> 普遍対象は, Ｑの構造の表現という位置づけになる。──翻って, Ｑは，普遍対象が体現する構造の一つの現象という位置づけになる。
>
> 「１と見る」とは，量の話を，この量の普遍対象に写すことを意味する。
> (→ §2.1.1「１と見る」の数学)

そして，ここが肝心な点になるのであるが，「１と見る」は＜倍の合成＞を構造とする問題の解決に必要となる内容ではない。(→ §1.1.1 ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法)
必要ないことがやられるのは，学習主題の本質を見えなくするだけである。

この章では，この問題をつぎの構成で論ずる：

1. 「１と見る」の数学を，確認する。
   ──これは，小学算数で扱える内容ではないし，そもそも無用である。
2. 「１と見る」は，＜倍の合成＞を構造とする量計算を，混沌としたものにするだけである。
3. 「１と見る」を小学算数の内容にするのは，「数は量の抽象」の世界観の満足に過ぎない。（実際，数は量の比の表現に使えるようつくられるものであって，数を量の抽象とする論は誤りである。）
4. 「１と見る」は，小学算数にあるべきものではなく，したがって，やめるべきものである。
5. ただし,「１と見る」をやめるとは, ＜倍の合成＞をもとにした「×・÷」の文法が指導内容になるということである。──この変更を至難とするときは，「数は量の抽象」「１と見る」に甘んじるしかない。

「1と見る」の問題は，数学で語ることが必須である。
数学を用いないと，「1と見る」の意味・構造が見えてこない。
没論理の思考に嵌り，ごまかされてしまう。
「1と見る」の数学は初等的ではないが，それは仕方がない。
実際，むしろ問題なのは，おおもとになっている数学の押さえという作業をとばして数学教育の研究に入ってしまうことである。

2.1「1と見る」の数学

2.1.1「１と見る」の数学

「１と見る」がどのような数学になるかを，ここで押さえる。

量の系Ｑ (例えば，重さ) の代数的構造を考える。
Ｑの要素２つに対しては，和が考えられている。
Ｑの要素 q_1 と q_2 に対し, これの和を $q_1 \boldsymbol{+} q_2$ で表すとしよう。(「**＋**」は太字の＋)

Ｑの要素に対しては，数の系Ｎ (例えば分数) の要素の倍作用が考えられている。
Ｑの要素ｑとＮの要素ｎに対し, ｑのｎ倍を $q_{\times} n$ で表すとしよう。(「$_{\times}$」は下付の ×)

Ｎの要素２つに対しては，和と積が考えられている。
Ｎの要素 n_1 と n_2 に対し，これの和と積をそれぞれ $n_1 + n_2$，$n_1 \times n_2$ で表すとしよう。

数の＋と × は，つぎの関係で条件付けられている (すなわち，これが＋と × の定義)：

$$q_{\times} n_1 \boldsymbol{+} q \times n_2 = q_{\times} (n_1 + n_2)$$

$$(q_{\times} n_1)_{\times} n_2 = q_{\times} (n_1 \times n_2)$$

そして，これらの意味をすべて込めて，この構造をつぎのように表すとしよう：

$$((Q, \boldsymbol{+}), _{\times}, (N, + , \times))$$

以上で，量の代数的な構造を規定したことになる。
このような数学に慣れていない読者には，これだけでも相当疲れてしまうかも知れないが，「１と見る」にまで行くにはまだ一山ある。

すなわち，数の系 (N, ＋ , ×) を素材にして，

$$((N, +), \times, (N, + , \times))$$

をつくる。
これは，量の構造をもつものになる――すなわち，量になる：

・(N, ＋) の要素が，「量としての数」
・(N, ＋ , ×) の要素が，「量としての数」の倍作用素――すなわち「量の比」

さらに, Ｑの要素ｇに対して定まるつぎの対応ｆが, ((Q, **＋**), $_{\times}$, (N, ＋ , ×)) と ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) の間の同型対応になる。

$$f : g_{\times} n \longmapsto n$$

さて，ここに出てきた「同型ｆ」が「１と見る」である。――実際, ｇを１と見ているわけである。

例えば，Ｑを重さの集合，Ｎを分数の集合，ｇを「グラム」としよう。
教員は，生徒につぎのことをさせる：

２ｇを，２にする。
２ｇと３ｇの和を，２＋３で計算する。
２ｇの３倍を，２× ３で計算する。

このとき教員が生徒にさせていることは，実はつぎの計算（式変形）である：

$$f(g_{\times}2) = 2$$

$$f(g_{\times}2 + g_{\times}3) = f(g_{\times}(2+3)) = 2+3$$

$$f((g_{\times}2)_{\times}3) = f(g_{\times}(2\times 3)) = 2\times 3$$

2.1.2「量としての数」：量の普遍対象

「1と見る」の数学の中で, 数の系 (N, ＋, ×) から「量としての数」の系 ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) を導いた：

- (N, ＋) の要素が，「量としての数」
- (N, ＋, ×) の要素が，「量としての数」の倍作用素——すなわち「量の比」

((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) は，N の要素を倍の作用素として考えるすべての量 ((Q, ＋), $_{\times}$, (N, ＋, ×)) にとって，この量の構造を示すものになっている。
数学のことばを用いれば,

> ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) は，(N, ＋, ×) の要素を倍の作用素として考える量の「*普遍対象 (universal object)*」

ということになる

「普遍対象」は，イデア論の「イデア」である。
((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) は ＜N を作用域とする量＞のイデアであり,
イデア ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) の降りてきたものが ＜N を作用域とする量＞である。
——実際，数学で自体的に存在するのは，数であって，量ではない。

線型空間論で「体K上のn次元線型空間E」を少し進んだところで,

> 「Kからの線型空間 K^n の導出」
> 「線型空間Eと K^n の同型」

の話が出てくるが, これが, いま論じている「１と見る」「量の普遍対象」の数学と対応している。
ただし, 「線型空間」と「量」は同じではない。
例えば, 自然数 $(\mathbb{N}, +, \times)$ に対する量

$$((\mathbb{N}, +), \times, (\mathbb{N}, +, \times))$$

は, 線型空間ではない。スカラが実数の２次元実線型空間

$$((\mathbb{R}^2, +), \times, (\mathbb{R}, +, \times))$$

は量ではないが, 複素数をスカラとしたときの１次元の線型空間

$$((\mathbb{R}^2, +), \times, (\mathbb{C}, +, \times))$$

は, $((\mathbb{C}, +), \times, (\mathbb{C}, +, \times))$ と同型なので, 量である。

2.2「１と見る」の無用

2.2.1「１と見る」がもたらす混沌

量の問題は，「１と見る」を施すことで，数だけの問題に変わる。

量の問題の中には，つぎのものがある：

- 量と数
- 量に対する数の倍と，数の積の「×」
- 量の和と，数の和の「＋」

この問題を数だけの問題にしたとき，その数だけの問題の中には，つぎのものが混在することになる：

- ＜量としての数＞と数
- ＜量としての数＞に対する数の倍「×」と，数の積の「×」
- ＜量としての数＞の和の「＋」と，数の和の「＋」

教員でさえ理解の難しいこの内容が，生徒に教えられるわけはない。
しかし，「数は量の抽象」の立場からの「割合の問題の解法」も，没論理を含みつつも「１と見る」をやっているわけであり，したがって，数の２種類の身分の混在が起こっている。
生徒は，ドロップアウトしないとすれば，この混沌に＜慣れる＞しかない。

2.2.2「１と見る」は「数は量の抽象」主義の満足のため

「割合の問題」を解くにおいて，「１と見る」は無用である (→ §1.1.1 ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法)。
しかも，＜量と数の区別＞が＜数の身分の区別＞に移されることで，数の身分の区別を読み切る力のない者には，その問題はまったく混沌としたものになる (→ §2.1.1「１と見る」がもたらす混沌)。

「１と見る」は，問題解決を回りくどくする (わかりにくくする)「儀式」でしかない。
では，なぜこの「儀式」が行われるのか？
数を量の抽象ということにしたいからである。
「数は量の抽象」の世界観の満足のために，＜倍の合成＞(これを構造とする問題の解決) の授業が数学の授業でなくなり，そしてこれの没論理に学習者が付き合わされる。

「数は量の抽象」は，数学ではない。
数学の方法はというと，それは線型空間論に範が示されているものになる。すなわち，１次元のときのスカラとベクトルは，それぞれ数と量に対応するものになる。スカラはベクトルに対する作用素として，ベクトルの「比」を表す。そして，スカラはベクトルの抽象ではない――もしそうだとしたら，スカラはベクトルであり，線型空間論は壊れる。

2.2.3「1と見る」は，やめるべき

以上，「1と見る」の数学を見てきた。
数学にしたときの「1と見る」は，「割合の問題」を解くのには必要のないもの (無用の長物) である。
そして，算数教育にあっては，扱うにしても消化できないものである。
教員の未消化の問題ならまだしも，生徒にとっては被害問題である。

「数は量の抽象」の立場の「1と見る」は数学ではなく，また，「1と見る」の数学は初等的でない。したがって，「1と見る」はやめるべきというのが，本論考の結論になる。

2.2.4「1と見る」をやめるとは，何をすること？

「1と見る」はやめるべきと述べた。
しかし，「やめる」ができるためには，替わりにつぎのことが算数の内容に入ってこなければならない (→ §1.1.1 ＜倍の合成＞を構造とする問題の解法)：

1.「n グラム」を「グラムの n 倍」と言えること
2.「m倍と n 倍の合成を (m × n) 倍と書く」が「×」の文法とされること
3.「mと掛けて n になる数を n ÷ mと書く」が「÷」の文法とされること

現行はつぎのようになっている：

1.「n グラム」は「1グラムの n 倍」
  「1グラムは1グラム」(グラムを単独にできない)
2. ＜mに抽象される量＞を n 倍した量の抽象が，m × n
3. ＜n に抽象される量＞をm等分した量の抽象が，n ÷ m
  あるいは，＜mに抽象される量＞に対する＜n に抽象される量＞の割合が，n ÷ m

現行は「数は量の抽象」の立場に立っているため，量計算の指導ではひどく没論理な論法をつくりださねばならない。しかし，ずっとこの軌道でやってきているので，いまからこれを改めるというのも至難である。

3.「数は量の抽象」とは どのような論か？

3.0　要旨

「数は量の抽象」の概念を立てることは，同時に，この概念を支えるための論を構築することである。本章では，この論を概観する。

「数は量の抽象」は，量を実体概念に定めるところから出発している。
「*量には内包量と外延量がある*」は，実体論として言っている。
また，数に備わっているものは量に由来しなければならないので，「*数の積は量の積の抽象*」を言い出さねばならなくなる。

> 数学では，量は一つの形式のことであり，数はこの形式の要素になっている。
> 特に，量より先に数がある。
>
> 実際，実体論を言うにしても，実体は量ではなく，量をその上に読んでいるところのモノである。しかも,「量を読む」の内容は「数を使う」である。
>
> ただし,「数は量の抽象」の没論理を論理で分析しようとするのは, 不毛な作業になる。この章で行うとするのは,「数は量の抽象」が何を主張しているか，これが何を含意することになるか，をただ示すことである。

「数は量の抽象」は，実際のところ，自然数･個数で以て数･量を考える。
「*数指導はタイルで*」「*割り算には等分除と包含除がある*」は，せいぜい自然数・個数のところでしか持ち堪えられない。

「数は量の抽象」は，自然数・個数より先に進んだときの量計算で困ることになる。
数の和・積は量の和・積の抽象にしなければならない。
自然数・個数のときは，＜数える＞が使えて，計算の合理化の格好をなんとかつくれた。自然数・個数より先に進むと，これができない。
そこでどんな手を使うことにしたかというと,「形式不易の原理」である:

> 「*自然数・個数で使えた形式は,*
> *自然数・個数より先に進んでも使える。*」

これを自然法則・物理法則に類する実体法則にする。

さらに,「数は量の抽象」なので，出てくる数をみな量にしなければならない。
ところが，２量があれば，これの比が考えられることになり，これは数である。この数もまた量にするということをやれば, 無限ループになる。
そこで，無限ループのストップをかけなければならない。
これをやるために，また自然法則・物理法則に類する実体法則を使う。
「割合」の問題の解法では, 数である割合を量にしなければならないので,
「１と見る」をやる。そして,「比の３用法」という実体法則を導入して,
無限ループのストッパーにする。 (→ §1.1.2「割合の問題の解法」(「数は量の抽象」の立場))

このように,「数は量の抽象」の保持は，パッチあての作業になる。
なぜこうなるかというと，論理矛盾をやっているからである。

3.1「数は量の抽象」論の内容

3.1.1「*数は抽象，量は具体*」

「数は量の抽象」は，量を実体概念に定めるところから出発している。
「*量には内包量と外延量がある*」は，実体論として言っている。
また，数に備わっているものは量に由来しなければならないので，「*数の積は量の積の抽象*」を言い出さねばならなくなる。

これに対し，数学では，量は一つの形式のことであり，数はこの形式の要素になっている。特に，量より先に数がある。

実際，実体論を言うにしても，<u>実体は，量ではなく，量をその上に読んでいるところのモノである</u>。しかも，「量を読む」の内容も，「数を使う」である。

3.1.2「*量には内包量と外延量がある*」

「数は量の抽象」は，量を実体概念とするところから出発している。
「*量には内包量と外延量がある*」は，実体論として言っている。

「*量には内包量と外延量がある*」は，奇妙な発想である。
「時速 150km の汽車と時速 100km の汽車は連結できない」の類の意味で，「*速度は加法が立たない——内包量である*」を言う。

「数は量の抽象」では，数の和は量の和の抽象であり，量の和が実体としてある。
「*量には内包量と外延量がある*」の発想は，「量の和の実体」に考えを及ぼした結果であるようだ。 ——速度の和の実体に考えを及ぼし，「異なる速度の汽車の連結」に至り，そして「連結できない → 速度の和が立たない」になった，というように見える。

しかし，ほんとにこんな考え方をするものかという疑問を，どうしてももってしまう。なんとも幼稚な考え方であるからだ。
しかも，「*量には内包量と外延量がある*」は，「数は量の抽象」論で必要とされる要素でもない。
よって，ここでは「内包量・外延量が出てきた理由はわからない・どんな場面を想定しているのかもわからない」としておく。

なお, 数学では, 量には和がある (和を定義しない「量」は, 量ではない)。
物理学では，速度の和を，あたりまえに計算する :「時速 150km の運動体の上を，同じ方向に時速 100km で走る運動体の速度は，時速 (150 ＋ 100) km。」
密度も，(つまらない内容ではあっても，形式的に) 量にすることができる。——ここで密度の和を使うのは，つぎのような場合 :「ある鉱物の鉄の密度は kg あたり 2g で，銅の密度は kg あたり 3g。鉄と銅を合わせたものの密度は，kg あたり (2 ＋ 3)g。」

3.1.3「*数の積は量の積の抽象*」

「数は量の抽象」は，量を実体概念に定めるところから出発している。
数に備わっているものは量に由来しなければならない。
そこで特に，「*数の積は，量の積の抽象*」を言い出さねばならなくなる。

数学では，数の積の意味は記号「×」の文法のことであり，そして「×」の文法はつぎのものである：

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$$

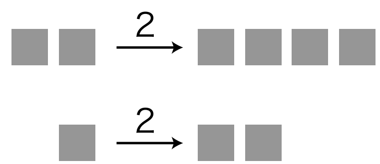
3.1.4「*数指導はタイルで*」

「数は量の抽象」は，実際のところ，自然数･個数で以て数･量を考える。
個数の場合，生活体験的ないし生理的に，＜個＞がほぼ一意的に定まる。そのため，個数とそれを扱う自然数が即応するような感じになる。
そこで，「*数指導はタイルで*」のような考えも出てくることになる。

「*数指導はタイルで*」では，例えば「２」のイメージ (理解シェマ) はつぎのようになる：

 ：2

一方，数学での「２」のイメージは，上の絵を使うとき，つぎのようになる：



なお，タイルは，タイルという形状に意味があるわけではない。おはじきであろうと竹ひごであろうと，最初の図式に立っていれば，タイルと同じことである。

「*数指導はタイルで*」は，数・量が自然数・個数で考えられていることによる。そして，自然数・個数のところでしか持ち堪えられない。
実際，分数になると，個数と自然数の即応のような＜量と数の即応＞という関係は，もはや立たなくなる。「数は量の比」につかねばなら

なくなる。

しかし，「数は量の抽象」は，「数は量の比」を退けることで自分を立てているわけであるから，「*数指導はタイルで*」を自然数より先の数にもなんとか延長しようとする。そしていろいろ無理を重ねていく。

3.1.5「*割り算には等分除と包含除がある*」

「数は量の抽象」は，実際のところ，自然数・個数で以て数・量を考える。「数は量の抽象」で「*割り算には等分除と包含除がある*」が言い出されるのは，自然数・個数で以て数・量を考えているからである。実際，「*割り算には等分除と包含除がある*」は，自然数・個数のところでしか持ち堪えられない。

自然数・個数で考えているにしても，どうして「*割り算には等分除と包含除がある*」となるのか？
「数は量の抽象」では，自然数の割り算も「量計算の抽象」として意味づけなければならない。そしてこれより，自然数の割り算に「等分除・包含除」の区別がつけられることになる。

数学では，「割り算」とは記号「÷」の文法のことであり，そしてつぎが「÷」の文法である：

$$m \times \square = \square \times m = n$$

「n ÷m」

註：特に ,「÷」の定義には，つぎのことが含意されている：

「× に関して，交換法則が成り立つ」

実際, 四元数では, × に関して交換法則が成り立たないので,「n ÷m」は定義されない。

さて，二つの式 m × □＝n，□ × m＝n は，つぎの形式の中に現れる:

$$\begin{tikzcd} 量_0 \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "n"'] & 量_1 \arrow[r, "\square"] & 量_2 \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} 量_0 \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "n"'] & 量_1 \arrow[r, "m"] & 量_2 \end{tikzcd}$$

自然数の場合，左の形式は「包含」の問題に適用できる：

「12 個では，3 個一組のクラスがいくつできる？」
「12 人に対し，3 人がけの椅子をいくつ用意すると
　全員すわれる？」

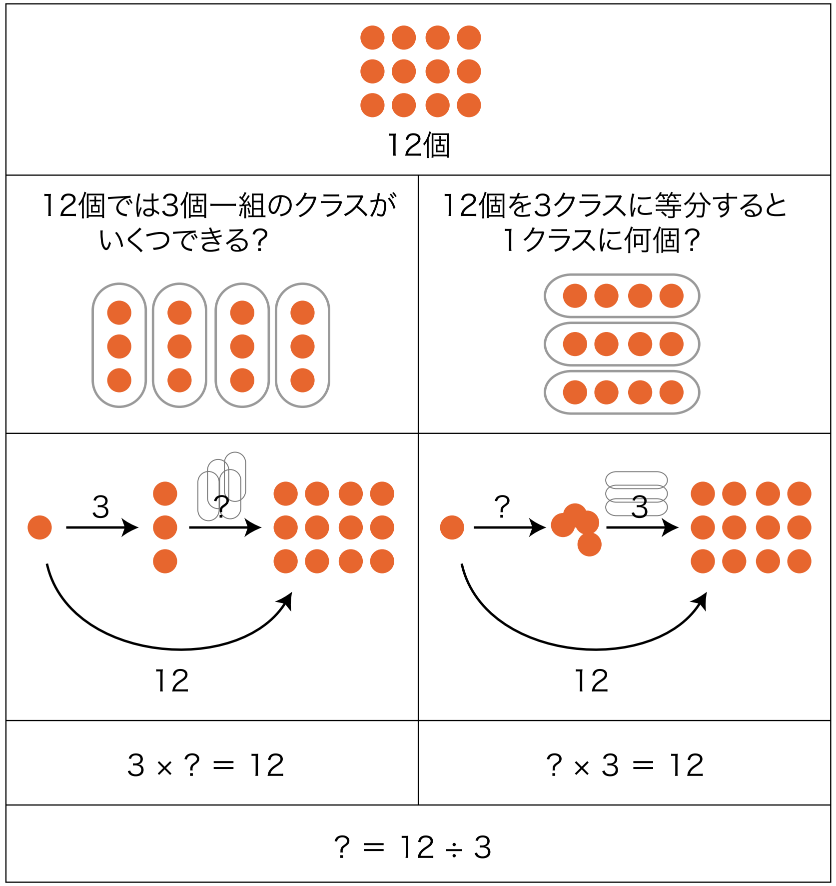
そして，右の形式は「等分」の問題に適用できる：

「12 個を３つのクラスに分けると，一クラスは何個？」
「12 人が３つの長椅子に同じ人数だけ座ると，
　一つの長椅子には何人？」

「n ÷ m」に「等分」と「包含」の二つの意味があるのではない。 ——
つぎのようになる：

「n ÷ m」の現れる形式に２種類ある。
そして自然数の場合，この２つの形式の適用される問題が，それぞれ「等分」と「包含」になる。

要点は，計算の道具と計算の対象の区別である。
ところが，「数は量の抽象」論は，「計算の道具は計算の対象の抽象」論である。そこで，「数は量の抽象」論では，「n ÷ m」に直接「等分」「包含」の２つの意味を考えてしまうことになる。



学校数学での自然数の割り算の指導は，この「等分除と包含除」である。
「12 ÷ 3」の意味は？と問われた生徒は，これが適用される等分ないし包含の問題を答えて，正解したことになる。
「3/2 ÷ 4/5」の意味は？と問われると，もう答えられない。——正負の数や複素数の場合は，言わずもがな。
そして，これは教員においても同じである。

→ §0.2 鳥瞰図 (「積・商の立式」のロジック)

3.1.6「*形式不易の原理*」

「数は量の抽象」は，自然数・個数より先に進んだときの量計算で，困ることになる。
すなわち，「数は量の抽象」の立場では，数の和・積を量の和・積の抽象ということにして，量計算を説明しなければならない。
自然数・個数のときは，＜数える＞が使えて，説明の格好をなんとかつくれた。しかし自然数・個数より先に進むと，「数の和・積を量の和・積の抽象ということにして，量計算を説明する」はできない。

そこでどんな手を使うことにしたかというと,「形式不易の原理」である:

「*自然数・個数で使えた形式は,*
自然数・個数より先に進んでも使える。」

これを自然法則・物理法則に類する実体法則にする。

例：「*長方形の面積は，数値が自然数，分数，実数のどれであっても，*
タテ × ヨコで求まる。」

しかし「*形式不易の原理*」なるものは，数学では演繹によって導かれるべき命題である。実体法則 (公理) のように導入されるものではない。
そして，「数は量の比」がこの演繹の中で使われる。（ → 長方形の面積の計算)

3.1.7「*1 と見る*」

「数は量の抽象」では，出てくる数をみな量にしなければならない。
ところが，２量があれば，これの比が考えられることになり，これは数である。この数もまた量にするということをやれば，無限ループになる。
そこで，無限ループのストップをかけなければならない。
これをやるために，また自然法則・物理法則に類する実体法則を使う。

「割合」の問題の解法では, 数である割合を量にしなければならないので,「１と見る」をやる。そして,「比の３用法」という実体法則を導入して, 無限ループのストッパーにする。（→ §1.1.2「割合の問題の解法」(「数は量の抽象」の立場))

単に「量ｂは量ａの何倍？」と問えばよいところを，「量ａを１に抽象するとき，量ｂはどんな数に抽象されるか？」という形の配置をつくる (「*1 と見る*」)。そして，このときの「どんな数」を，「割合」の意味とする。
「何倍？」の問題をこんなふうに「割合の問題」にすることに意味があるのか？何の意味もない。「*1 と見る*」は，何も機能していない。

3.2「数は量の抽象」の荒唐無稽は，なぜ起こり得た？

3.2.0　要旨

「数は量の抽象」は，戦後教育における日教組と文部省の対立という時代背景をもつ。
思想的優位を自負する「反権力」陣営は，この思想的優位を教育理論においても示そうとして，教育革新の運動をおこす。運動の主体になったのは，日教組である。(「国民教育運動」, 1960 年代)
数学教育の分野では, 数学教育協議会 (数教協) が運動の主体となり,「数は量の抽象」が「反権力」の数学教育として打ち出される。 ——翻って,「数は量の比」が，「権力」側の数学教育と見なされたわけである。

「数は量の抽象」が「数は量の比」に挑んだ論争は,「割合論争」と呼ばれ, その内容がいろいろな文献に残っている。「数は量の抽象」のイデオローグは遠山啓 (数教協) であり, これに和田義信 (文部省) が「数は量の比」を以て対する形になる。

遠山の「数は量の抽象」論は荒唐無稽であり，数学ではない。
この荒唐無稽は，「反権力」をためにしていることによる。 ——対立軸を無理につくる立場に自分をもっていってしまい，荒唐無稽を深める結果になってしまった。

ただし，学校数学が択んだのは，「数は量の抽象」の方である。

3.2.1　準備：「数・量」の数学

「数は量の抽象」は没理論である。
この没理論を見て取れるためには,「数･量」の数学の知識が必要になる。
「数・量」の数学は,「数は量の比」の数学である。

そこで,「数は量の抽象」の論を見る前に,「数は量の比」の数学の押さえておくことにする。(→ §1.2.5「数」の数学的定義)

1. 数学では，数も量も形式である (形式として定義される)。
   そして形式ということでは，以下に示すように，数が量より先にくる。

2. 数 (一つの系) の形式は, 要素の集合 N, 加法＋, 乗法 × で構成される:

   (N, ＋ , ×)

   例：自然数 ($\mathbb{N}$, ＋ , ×), 有理数 ($\mathbb{Q}$, ＋ , ×), 複素数 ($\mathbb{C}$, ＋ , ×)

3. 量 (一つの系) は，数を作用素とする加法群のように定義される。
   これの形式を示すのに,「普遍対象 (universal object)」の考え方を使う。
   すなわち, (N, ＋ , ×) の要素を使ってつくられるつぎの対象を,「数 (N, ＋ , ×) を作用域とする量」の普遍対象にする：

   ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

   読み方：
   「(N, ＋ , ×) の要素 が，(N, ＋) の要素に,
   倍作用 (真ん中の ×) する」

量 (系) は，「数 (N, ＋ , ×) を作用域とする量」として，((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) と同型な対象 (object) として定義される：

$$((Q , \mathbf{+}), _{\times} , (N, + , \times))$$

読み方：
「(N, ＋ , ×) の要素 が，(Q , **+**) の要素に，倍作用 ($_{\times}$) する」

例：((りんごの個数 , **+**), $_{\times}$, ($\mathbb{N}$, ＋ , ×))
((重さ , **+**), $_{\times}$, ($\mathbb{Q}^+$, ＋ , ×)) (分数値に限定の場合)
((直線上の移動 , **+**), $_{\times}$, ($\mathbb{R}$, ＋ , ×))
((平面上の移動 , **+**), $_{\times}$, ($\mathbb{C}$, ＋ , ×))

(Q , **+**) の要素が, 量 (要素) ――「量 (系)」に対する「量 (要素)」――である。
量 (要素) に関する算法としては，量 (要素) 同士の和と，量 (要素) に対する数 (要素) の倍だけが定義される。

量 (系) と量 (要素) の区別の意味：
個々の重さが量 (要素) で，個々の重さを要素とする集合 (「重さ」のカテゴリーに対応) が量 (系)。

特に，量の構造は数の構造より導かれる。
例えば，量の位相構造は数の位相構造から導かれる。 ――自然数, 有理数，実数を作用素とする量の位相は，それぞれ離散，稠密，完備である。

そして，以上のこととあわせて，つぎのことを確認しておく：

4. 量は自体的に存在していない。
   人が，物（たとえば，棒）に，量（たとえば，長さ）を解釈する。
   量のその解釈がどのようになるかは，人と物 (すなわち状況) に依存する。

3.2.2「数は量の抽象」の歴史的背景

「数は量の抽象」は，戦後教育における日教組と文部省の対立という時代背景をもつ。
思想的優位を自負する「反権力」陣営は，この思想的優位を教育理論においても示そうとして，教育革新の運動をおこす。運動の主体になったのは，日教組である。(「国民教育運動」, 1960 年代)

数学教育の分野では, 数学教育協議会 (数教協) が運動の主体となり,「数は量の抽象」が「反権力」の数学教育として打ち出される。 ——翻って,「数は量の比」が,「権力」側の数学教育と見なされたわけである。

「数は量の抽象」が「数は量の比」に挑んだ論争は,「割合論争」と呼ばれ, その内容がいろいろな文献に残っている。「数は量の抽象」のイデオローグは遠山啓 (数教協) であり, これに和田義信 (文部省) が「数は量の比」を以て対する形になる。

3.2.3「数は量の抽象」の遠山の言説

「量は数の抽象」の論は，つぎを基調とする：

> 量が，自体的に存在している。
> 数は，量の抽象である。
> ——特に，数の ＋，× は量の ＋，× の抽象である。

註：「量は数の抽象」の立場では，量と量の × があり，これが第三の量をつくる。

このことを述べている遠山のことばを，いくつか引いてみる：

> がんらい分数 × 分数は，連続量 × 連続量の抽象化なのである。([1], p.30)

> 私は分数を直接的に具体的な連続量（長さ，重さ，体積など）につながるものと考えたい ([1], p.30)

> 単位や測定のまえにも連続量は存在している‥‥このようにまだ測定されていない生の連続量を「未測量」とよぶことにしよう。‥‥測定ということは，連続量を単位に分割することであるから，もはや純粋な連続量ではなく，分離量の仮面をかぶった連続量なのである。‥‥量の分数理論の基礎にあるのは，種々さまざまの仮面ではなく唯一無二の量の素顔を見ようとする考え方である。したがって乗法そのものも，そのような未測量のあいだにある客観的な自然法則もしくは社会法則から抽出されたものとみるのである。([2], p.73)

> 分離量は数え，連続量は測るのであるが，数えるまえから分離量は存在し，測るまえから連続量は存在している。([3], p.26)

> 二本の棒をつなぐとより長い棒ができる。この事実は物指しができるまえから存在している事実であり，つまり未測量のあいだに成り立っているのである。このような法則を未測法則とよぶことにしよう。これを既測量に直すと 25cm ＋ 17cm というような方式がでてくるのである。
> 乗法や除法についてもやはり同じである。速度 × 時間＝距離という法則は未測量のあいだにも成立している。「これだけの速さで，これだけの時間走ったら，これだけの距離だけ走る」という事実は物指しや時間や速度計以前に存在している。それを既測量に直すと既測量のあいだの乗法になるのである。 ([3], pp.26, 27)

> 分数 × 分数や小数 × 小数, 分数 ÷ 分数, 小数 ÷ 小数は本質的には連続量 × 連続量，連続量 ÷ 連続量の抽象的表現‥‥このような異種の量の乗除によって第三の量がつくり出されるわけである。([4], p.72)

> 量の分数は，分数を関係や操作から一応独立な実態概念としてとらえるので +2/3 と ×2/3 とを使いわける必要はなく，それを単一な 2/3 としてとらえるので，アイマイサは何もない。+2/3 と ×2/3 のちがいは量の体系のなかで正確に位置づけられているので混同は起こらない。加法的な外延量と乗法的な内包量がはっきり区別

されているからである。････量の体系からいうと加法群は外延量の抽象的な表現であり, 乗法群は内包量の表現として理解される。([5], p.5)

もともと割合分数には実数の二重構造（加法群と乗法群）に対する正しい把握がない。量の体系からいうと加法群は外延量の抽象的な表現であり，乗法群は内包量の表現として理解される。したがって加減乗除を一まとめにして四則と呼ぶよりは加減と乗除というわけ方をとる。だから乗法を加法のくりかえしとしてではなく，はじめは乗法を独立の演算, つまり量×量として導入することになる。([5], pp.5,6)

引用文献 (著者はすべて遠山啓)：
[1]　量の問題について，*数学教室* , No.44 (1958, 8), pp.29-38
[2]　教師のための数学入門 VI，*数学教室* , No.52 (1959, 3), pp.68-75
[3]　量について，*数学教室* , No.55 (1959, 6), pp.24-27
[4]　量の系統，*算数教育* , No.6 (1959, 9), pp.69-78
[5]　量ではじめるか，割合ではじめるか——量の分数について，*算数教育* , No.28 (1961, 6), pp.1-8

3.2.4　没論理の核心：「実体から関係へ」

「数は量の抽象」は，没論理である。そしてこの没論理の核心が，遠山のつぎのことばに出ている：

> ここで分数についての二つの対立的な見方がでてくる。一つは和田理論のように分数を関係数もしくは割合分数とみる方法である。これは分数を二つの量の関係概念としてとらえようとするものである。
> しかし，これだけが分数の考え方ではない。それは一つの連続量の対象的表現とみる考え方である。つまりこの分数を実体概念としてとらえようとするのである。もちろん割合という概念を排除するのではない。実体概念を固めてから関係概念に移ろうとするのである。ごく常識的にいっても実体概念の方が先で関係概念は後になる。････＜関係から実体へ＞ではなく＜実体から関係へ＞というのが認識の順序に合っており，そのほうがずっと理解しやすいはずである。
> (教師のための数学入門 VI，数学教室 , No.52 (1959, 3), pp. 69, 70)

言っていることは,「*数の実体概念を固めてから, 関係概念の数に移ろう*」である。実体概念の数は「量としての数」であり，関係概念としての数は「量の比としての数」である。
数にこの二役を与えることについては，問題はない。問題は「*実体概念を固めてから関係概念に移ろう*」の順序である。
この順序はあり得ない——構造的にあり得ない。

「構造的にあり得ない」を見るためには，数学の知識が要る。 ——数学

で考えないと，「*実体概念を固めてから関係概念に移ろうとするのである*」のことばの表面的な意味にだまされる。 (→ §3.2.1 準備 :「数･量」の数学)

数の系 (N, ＋ , ×) は，量の比の表現と計算に使われるものとして存る。
(N, ＋ , ×) の要素が「量の比としての数」である。
一方，「量としての数」は，数の系 (N, ＋ , ×) から導かれる系 ((N, ＋), × , (N, ＋ , ×)) の (N, ＋) の要素を指す。
「量の比としての数」から「量としての数」を導くことができるのであって，その逆ではない。
「実体概念・関係概念」の言い方を使って言い換えると，関係概念としての数から実体概念としての数が導かれるのであって，その逆ではない。

遠山は，「*ごく常識的にいっても*」「*認識の順序に合っており*」「*ずっと理解しやすいはず*」と言う。しかし，そもそも論理的 / 数学的構成というものは，「*ごく常識的にいっても*」「*認識の順序に合っており*」「*ずっと理解しやすいはず*」の逆を行くものになる。──だからこそ，論理学･数学というものが意味をもつ。

3.2.5　無理な姿勢は，荒唐無稽を生む

遠山の「数は量の抽象」論 (§3.2.3) は，荒唐無稽である。
実際，これをもとにして量計算などやろうとすれば，循環論法になる。
──このことは，少しく論理を扱える者なら，簡単に見てとれる。

そこで，つぎの疑問がわく：

> なぜ，この荒唐無稽が起こってしまったのか？
> なぜ，この荒唐無稽が受け入れられたのか？

<u>なぜ，この荒唐無稽が起こってしまったのか？</u>

私はつぎのように推測する：

- 「対立点をつくり出さねばならない」が前提にあって，無理をやってしまった。
- 自分では「すごくいい切り口を手にした」という思いがあり，独り善がりで突き進んでしまった。
- 内容を理論的にチェックする者が周りにいなかった。
  (実際，チェックし出せば，「対立している相手」のようになってしまう。)

対立点を無理につくり出す様を，見てみよう：

> ここで問題は一つの分岐点にくる。一つの道は初等数学教育から量を追放して，微分積分をとびこしてこれを 20 世紀の抽象数学に結びつける道がある。もう一つは量を中心において微分積分に発展し，

それを高校までの最高目標とする道である。ところで私は後者をえらびたいのである。割合分数をとなえる人たちはおそらく前者をめざしているのであろう。([1], p.32)

和田理論では数は体をなしていない ···· 数を体ではなく加群と考える ···· 和田氏は関係数という考え方を導入する。([2], p.69)

分数小数を連続量の抽象的表現とみる立場を「量の分数」とよぶことにすると，これに対立する考え方は「割合主義」である。これは量の追放を意図したクロネッカー以来しばしば現れてきた考え方で別に新しいものではない。割合分数派の最高指導者である和田義信氏が明治 38 年にでたクニリングの『数え主義算術教授法真髄』という本をよりどころにしていることでも，その思想的系譜は明らかであろう。簡単にいうと割合分数というのは「数え主義」の復活 ···· ([3], p.27)

割合分数の立場の人々は分離量から整数を抽出し，そこから二つの整数の組を考えていくことになり，連続量の詳細な分析を行うことはできない。だから比例などになるともう正しい系統をつくることはできない。比例というのは度や率の三用法を連結したものと考えることができる。たとえば「３mが 200 ｇの針金は ８mでは何ｇか」という問題があったとき，まず１mの質量を求めて 200/3 ｇを得る。これは密度つまり度の第一用法であり，それから８mを求めるのは第２用法になる。「多から一」が第一用法で,「一から多」が,第二用法になる。([4], p.77)

割合分数····を関係とみるか操作とみるか ···· 日本の割合分数派はこの点の分析が不徹底で，ある場合には関係，ある場合には操作というように動揺している。たとえば割合分数の総本山である和田義信氏は 10 年前には「関係数」というコトバを使っていたが，数年前から「副数」というコトバを使っている。副数ということばは奇妙なコトバであるが，これは明治時代の数え主義の術語であって，今日ではオペレータ (operator) という意味である。([5], p.4)

疑問のもうひとつ「なぜ，この荒唐無稽が受け入れられたのか？」の方は，「学校数学は「数は量の抽象」を択る」の章 (§4) で論ずる。

引用文献 (著者はすべて遠山啓)：

[1]　量の問題について，*数学教室* , No.44 (1958, 8), pp.29-38

[2]　教師のための数学入門 VI，*数学教室* , No.52 (1959, 3), pp.68-75

[3]　量について，*数学教室* , No.55 (1959, 6), pp.24-27

[4]　量の系統，*算数教育* , No.6 (1959, 9), pp.69-78

[5]　量ではじめるか，割合ではじめるか——量の分数について，*算数教育* , No.28 (1961, 6), pp.1-8

4.　学校数学は「数は量の抽象」を択る

4.0 要旨

「数は量の抽象」は，没論理である。
論理矛楯がこれの不具合であるから，不具合はやり過ごすしかない。
すなわち，パッチをあてるようにやり過ごす。
「比の３用法」や「形式不易の原理」は，パッチである。

しかしそれでも，教育現場には，数は量の比」ではなく,「数は量の抽象」の方がすんなり入る。 ——「数は量の比」は「*難しくてダメ*」になる。
こうして学校数学は,「数は量の抽象」の荒唐無稽を<u>数学として</u>「教える」ところとなる。

没論理を<u>数学として</u>「教える」わけだから，授業はぐちゃぐちゃな内容になる。
これが，学校数学が「数は量の抽象」を択ったことのリターンである。

学校数学は自分では意識していないかも知れないが，ここではつぎが問題になっている：

どちらがマシか：
　「数は量の抽象」のリターン
　「数は量の比」の内容の難さ

そして，「*難しくてダメ*」にしても，これはつぎのように改めて問題にされるべきことがらである：

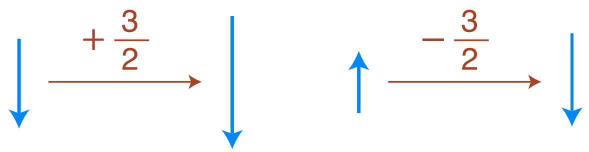
「数は量の抽象」でカラダをつくってしまった教員だからなのか？
それとも，これから新しく学ぶ生徒にとっても同様か？

4.1.1　学校数学は「数は量の抽象」を択る

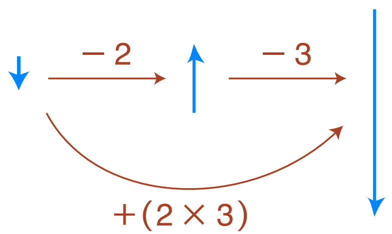
学校数学は「数は量の抽象」を択っていることになる。

例：正負の数

現行では, 正負の数は「正逆２方向の量の抽象」として指導される。数学であれば，正負の数はつぎのように「正逆２方向の量の比」として指導されねばならない：



そしてこのように指導されるとき，「負数 × 負数＝正数」はアタリマエのことになる：



しかし，学校数学は，正負の数を「正逆２方向の量の抽象」で指導するので，「負数 × 負数＝正数」の説明ができない――荒唐無稽なこじつけがこの場合の「説明」になる。

「数は量の抽象」論を構成する以下のものも，すべて現行の学校数学および数学教育の学会の中に現象としてある：

「数は抽象，量は具体」
「量には内包量と外延量がある」
「数の積は量の積の抽象」
「数指導はタイルで」
「割り算には等分除と包含除がある」
「形式不易の原理」
「１と見る」

註：タイルは，タイルという形状に意味があるわけではない。おはじきであろうと竹ひごであろうと，「数は量の抽象」の図式に立つものであれば，タイルと同じことである。（→ §3.1.4「数指導はタイルで」）

つまり，結果として，学校教育に入ったのは，「割合論争」で遠山が主張した「数は量の抽象」である。 ――和田の「数は量の比」は，学校教育には容れられなかった。

4.1.2　なぜ「数は量の抽象」の方を択ったのか？

学校数学は,「数は量の比」ではなく,「数は量の抽象」を択った。
なぜか？

「割合論争」を背景としてどの程度に考えたらよいかは慎重な研究が必要になるが, 結果のみを見れば,「割合論争」で遠山に軍配をあげた格好になる。すなわち, 遠山の論の方が正しいのではないか, と思われたということである。

ひとが或る論を択り或る論を退けるとき, 論の真偽が見られているわけではない。
雰囲気というものが, 支配的な要素になる。
学校数学が「数は量の抽象」を択ったことについては,「遠山の論の方が正しいのではないか」の雰囲気の醸成が推察される。

しかし, 雰囲気の問題はとらえようがないので, これはよこに置くとしよう。
ここでは, 学校数学が「数は量の抽象」を択った理由を考える視点として, つぎの２つをあげる：

A. 遠山の論には人受けする要素があるのではないか？
B.「数は量の比」は, 内容的に理解されなかったのではないか？

<u>遠山の論には人受けする要素があるのではないか？</u>

これについては, 遠山のつぎのことばが「人受けする要素」にあたると

思われる：

> 実体概念を固めてから関係概念に移ろうとするのである。
> ごく常識的にいっても実体概念の方が先で関係概念は後になる。
> ‥‥＜関係から実体へ＞ではなく＜実体から関係へ＞というのが認識の順序に合っており, そのほうがずっと理解しやすいはずである。
> (教師のための数学入門 VI, 数学教室 , No.52 (1959, 3), pp.69, 70)

「数」に適用すると間違いになるが (→ §3.2.4 没論理の核心：「実体から関係へ」), 生活感覚ではもっともと思ってしまうロジックである。

<u>「数は量の比」は, 内容的に理解されなかったのではないか？</u>

「数は量の比」は数学である。
これを理解する作業は, 数学を理解する作業である。
「数は量の比」は一つの体系の中にあり, これを理解するにはその体系から理解しなければならない。

一方,「数は量の抽象」の方は, これを読むのに数学が要らない。
「ここから話が始まる」といった感じで読むことになる。
そして この話は, 生活感覚で読める。
数学的には没論理だが, 内容がやさしく感じられるのである。

実際,「数は量の比」の方は, 教員がいま改めて教えられても,「難しくてダメ」の拒否反応が出るようなものである。

例：速さ
「数は量の比」では，速さは時間と距離の間の比例関係である。速さの問題は比例関係の問題であり，比例関係の問題として解くことになる。
一方,「数は量の抽象」では，速さは実体である。速さは距離 ÷ 時間であり, 距離は速さ × 時間, 時間は距離 ÷ 速さとなる。このときの「×・÷」は数学的には意味不明であるが，小学生のアタマには，この式を使った問題解法の方が圧倒的に入りやすい。

ただし，「*難しくてダメ*」は，
「数は量の抽象」でカラダをつくってしまった教員だからなのか？
それとも，これから新しく学ぶ生徒にとっても同様か？
というふうに改めて問題にされるべきことがらである。

4.2「数は量の抽象」を択ることのリターン

4.2.1　没論理が数学として教えられる

「数は量の比」は, 線型空間や加群 (module) の話に慣れている者なら「数と量の関係は，スカラとベクトルの関係のようなもの」の言い方で了解できる内容である。
「量」の語を使ってはいても，それは数学的な形式の話になる。
「数は量の比」とはいっても，数より先に量があるのではない。形式としての量は，数を素材にして定義される。数の方が量より先にくるのである (§2.1.2「量としての数」: 量の普遍対象)。

一方,「数は量の抽象」は，実体概念として量を立てるところから論を起こす。
「数は量の抽象」は，＜量→数＞の写像論である。数は量の抽象であるとする。そして，つぎのような論を展開していく：

「数は抽象，量は具体」
「量には内包量と外延量がある」
「数の積は量の積の抽象」
「割り算には等分除と包含除がある」
「形式不易の原理」
「1 と見る」

＜量→数＞の写像論は，端的に間違いである。
これを貫徹しようとすれば，その都度現れる論理的矛盾に対してこれを糊塗する理屈をつくりださねばならない。
こうして,「数は量の抽象」は保持しようとすればするほど, モンスター理論化する。

「数は量の抽象」は，没論理である。
学校数学が「数は量の抽象」を択ったことの単純なリターンは,「没論理を数学として指導することになる」である。

では,「数は量の抽象」は，教育的方便になり得るか？
すなわち，わかりやすくて且つ結果オーライとなるようなものか？
そうはならない。
当然だが, 数の概念, 数の算法, 量計算の指導を荒唐無稽にし, けっきょくわけのわからないものにしてしまう：

・(複素数にまで通底する) 数の意味，＋，× の意味を示せない。
・数 × 数で，前と後ろの数を別様に解釈する。
・分数 × 分数を，分数 × 整数，分数 ÷ 整数，整数 × 分数，分数 × 分数のステップにわける。
・正負の数の積を説明できない。
・物の結合を「量の和」にして，これの抽象が「数の＋」であるとしているので,「内包量・外延量」の似非概念がもうけられる。・時間・距離・速さの問題を,「速さ × 時間＝距離」の問題だと思う――比例関係の問題として論理的に解くことができない。
・長方形の求積の問題を,「長さ × 長さ＝面積」の問題だと思う――複比例関係の問題として論理的に解くことができない。
・数を量で解釈するので，自然数の割り算に「等分除と包含除」の区別 (似非概念) がもうけられる。

そして，これは同時に，学習者を＜おかしいということがわからない者＞にするということである。

例 :「数は量の抽象」では，タイルを数 (数の具象) として使う。
タイルで乗法はできない。
しかし，タイルを使う当人は，タイルで数の乗法をやっていると思っている。

4.2.2　不具合はやり過ごすしかない

「数は量の抽象」を択った学校数学は，これの没論理を数学として指導するものになる。
数学は論理である。
没論理を数学として指導すれば，即，論理矛楯になる。
この論理矛楯は，論理的思考の解決するところではない。

没論理はやり過ごすしかない。
ごまかしごまかしで，しのいでいくしかない。
どのように？
論理的矛盾の川が目の前に現れたら，これにブリッジをかけてその上を通る。(川に入らずに済ませる。)
「比の３用法」や「形式不易の原理」は，この手のブリッジである。

例：分数の積・商

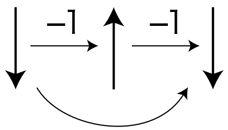
分数 × 分数に至るのに, 分数 × 整数, 分数 ÷ 整数, 整数 × 分数, 分数×分数のステップを踏む。 内容も没論理ながら,「×」の文法をはじめから逸脱している。

m × n は，同種の数である m，n に対して定義される。
例えば，分数 × 整数と書くときのその整数は，整数の系を分数の系に埋め込むという処理を施したものであり, 分数 × 分数である。

分数 ÷ 分数は, 説明に「量 ÷ 量」と「形式不易の原理」を使う。 もちろん，これはごまかしである。

例：正負の数の積

例えば $(-1)\times(-1)=+1$ は，つぎのように単純なことである：



$(-1)\times(-1)=+1$

しかし「数は量の抽象」では，正負の数は正逆２方向の量の抽象である。正負の数の積を「量 × 量」に解釈せねばならない。そこで「西に 1 km/ 時で歩いたら 1 時間前には最初の位置から東に何 km」みたいな，わけのわからない導入問題をむりやりつくることになる。

4.3「数は量の抽象」がすべてになる

4.3.1「数は量の比」の世代的忘却

学校数学が (「数は量の比」ではなく)「数は量の抽象」の方を択り, これを専らにするようになってから, ほぼ半世紀が経った。

「数は量の抽象」が専らになったところから教員・学生を始める者には,「数は量の抽象」がすべてになる。こうして「数は量の比」は, 世代的に忘却される。

「数は量の抽象」を所与にした者は, これを数学にする。
一方, 数学は「数は量の比」の方にある。
「数は量の比」の世代忘却は, 学校数学が数学を知らずに過ごしているという状態である。

世代的に忘却された「数は量の比」は, 思い起こされる必要がある。

4.3.2「*数学から見た学校数学*」

数学教育は,「*数学から見た学校数学*」の視点を重要なものとする。
学校数学は数学と同じものではないが, 数学から学校数学を見ることで, 学校数学が使っている「嘘も方便」が捉えられ, そして「嘘も方便」の通用期間や,「嘘も方便」を使った報いがどのように返ってくるかということが, 捉えられる。

学校数学の「数は量の抽象」を見る数学は,「数は量の比」である。

5.　量計算の数学

5.0　要旨

数学の場合，問題を解くとは，論理に則って問題の還元（簡約化）を進めることである。実際，このとき行く着いたもっとも簡約された形が，「解」になる。

問題が複雑になれば，還元のステップ数が多くなる。適用される定義・命題も多くなる。
量の問題を「還元」の形で解けるためには，「量・数」の数学がきちんと押さえられていることが必要になる。「量・数」の数学をやっていなければ，解を求めることを数学として行うことはできない。

「量・数」の数学は，「数は量の比」である。
一方，学校数学は「数は量の抽象」を択り，これを専らにしている。
そしてこの状態がほぼ半世紀続いてきたことで，「量計算の数学が知られないまま」という状態に，いま学校数学はなっている。

5.1　量計算の数学が知られないままに

5.1.0　要旨

数学は，量の問題を数の問題に還元して解く。
数の問題に還元するには，何段かの論理的ステップを踏む。
この論理的還元の概念が無かったり希薄であるとき，ひとは，量の問題から数の問題への移行をワン・ステップでやろうとする。
問題のパターンを求め，このパターンの問題に対して使うべしと習った公式を適用する。

量の問題から数の問題への移行をワン・ステップでやるやり方は，＜もの→ことば＞の写像論のように＜量→数＞の写像論を立てる論によって，合理化される。
「数は量の抽象」は，このような論である。
公式適用の問題解答は ,「数は量の抽象」の立場と相性がよい。

量の問題を数の問題に還元する数学は,「数は量の比」である。
しかし，学校数学は「数は量の抽象」の方を択っている。
長方形の求積の問題解答を生徒に教えるのに，教師は「タテ × ヨコ＝面積」であると教える。速さ・時間・距離の問題解答を生徒に教えるのに, 教師は「速さ＝距離 ÷ 時間 (距離＝速さ × 時間，時間＝距離 ÷ 速さ)」であると教える。

5.1.1 論理を考えられないとき ,「公式」適用の問題解答に

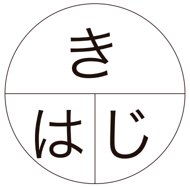
数学は，量の問題を数の問題に還元して解く。
数の問題に還元するには，何段かの論理的ステップを踏む。
この論理的還元の概念が無かったり希薄であるとき，ひとは，量の問題から数の問題への移行をワン・ステップでやろうとする。
問題のパターンを求め，このパターンの問題に対して使うべしと習った公式を適用しようとする。

量の問題から数の問題への移行をワン・ステップでやるやり方は，＜もの→ことば＞の写像論のように＜量→数＞の写像論を立てる論によって，合理化される。
「数は量の抽象」は，このような論である。
公式適用の問題解答は ,「数は量の抽象」の立場と相性がよい。

学校数学は「数は量の抽象」を択っている。
現行は,「量の問題を解く」を「公式」「形式不易の原理」の適用でやる。
「公式」「形式不易の原理」を使うことで，推論を跳び越える。

長方形の求積の問題解答を生徒に教えるのに，教師は「タテ × ヨコ＝面積」であると教える。速さ・時間・距離の問題解答を生徒に教えるのに, 教師は「速さ＝距離 ÷ 時間 (距離＝速さ × 時間，時間＝距離 ÷ 速さ)」であると教える。 ──「× ・ ÷」は数に対して用いる記号であり，これは「×・÷」の誤用である。しかし, 現行は「数は量の抽象」の立場に立っているので，誤用とは思わない。

わたしの周りの学生などは，時間・距離・速さの問題を解くときはつぎの「公式」を使うようにと習ってきている；



註：問題の構造・論理を教えるのがむずかしい生徒に対して，「公式」の直接適用で問題の答えを得なさいと指導することはある。「タテ × ヨコ＝面積」「速さ＝距離 ÷ 時間」は, このような「公式」である。

5.1.2　論理の不得手が ,「抽象」の短絡に惹かれる

論理を知り論理を運用することはカラダのものであり，そしてこのカラダの形成が容易でない。量の問題を解くときの論理はそれほど難しい内容ではないが，人のカラダは「論理」に抵抗するものように見える。

註：論理を指導されるわけではないのに，人は高度に論理の運用ができる。 これは，人の使うことばが，＜論理の高度な運用を自ずと実現するもの＞のようにできあがっているからである。

「論理」を苦手とするとき, ひとは結果先取りに向かう。すなわち「できる」に向かう。
問題解決では，問題の論理的還元ではなく，問題の見掛け（パターン）に対応する方を択ぶ。
教員もこれをやってしまう。教員にとっても，「論理」は高いハードルである。

問題を正しく解けるためには，論理を運用する力が必要になる。
翻って，論理を運用できるカラダをつくってこれなかった者は, 問題を正しく解ける者であることができない。 この場合の論理運用のカラダづくりを指導するのは，数学教育である。
どのようにして？
教育は，愚直な方法論しか持っていない。
論理運用のカラダづくりをさせようとするときは，論理運用の鍛錬を課す。
同様に，＜問題解決＝問題還元＞のカラダづくりの方法は，＜問

題解決＝問題還元＞の鍛錬の他は考えようがない。

「公式」「形式不易の原理」を使えば，推論を跳び越えられる。
「数は量の抽象」は，これを逆用する格好になっている。すなわち，「公式」「形式不易の原理」の適用を合理化する理論になっている。

「数は量の抽象」は，＜量→数＞の写像論である。
量の問題に対しては，これに応ずる数式があることになる。
両者の関係は「写像」であるから，「問題の論理的還元」という主題は発生しない。特に，この理論は推論を封じるものになる。

写像論と「問題の論理的還元」の二つを示されると，ひとは写像論の方を択んでしまう。一見，簡単であるからだ。
実際，速さの問題は，速さの公式を使わせれば小学生も答えを出せるようになる。一方，「問題の論理的還元」の方は，大学生でも難しい。
量の問題を数の問題にかえて解く場合，論理を厳格に適用して問題の還元のステップを一つ一つ踏むのと，ワン・ステップでやってしまうのとでは，後者の方が自ずと択ばれてくる。
特に,「数は量の比」と「数は量の抽象」のうち学校数学が「数は量の抽象」の方を択ったのは，いわば必然であった。

5.1.3「量の問題を解く」を数学としてやらないことの報い

学校数学は数学とは違う。したがって，「量の問題を解く」が数学としてやられていないから「ダメ」ということにはならない。
「量の問題を解く」が数学としてやられていないことが問題になるのは，これによって困ったことが起こってしまう場合である。そして，実際，困ったことが起こってしまう。

先ず,「量の問題を解く」を数学にしないやり方は, 長くはもたない。早晩, 苦しくなる。——小学算数であれば，特に分数の積・商が入ってくるところ。

つぎに，「量の問題を解く」を数学としてやらないとは，これを数学としてやるカラダがずっとつくられないということである。数学をするカラダがつくられないのは，教員も同じである。

5.1.4 量計算の数学が知られないままに

「タテ × ヨコ＝面積」「速さ＝距離 ÷ 時間」は，「×・÷」の記号の故意の誤用である。教師がこれを承知し，「嘘も方便」としてこれを教えているのなら，問題はない。問題は，教師がこれを「嘘」と思っていない場合である。
そして，この問題は現実的なものである。

学校数学は，「数は量の抽象」を長くやってきた。「数は量の抽象」で教えられた生徒が教員になり，その教員が「数は量の抽象」を教える。これが繰り返されていまは，量の問題を解くのが数学であるということ，その数学の形は「問題の論理的還元」であるということも，知られなくなっている。

実際，「問題の論理的還元」は，これを意識して学習する経験がもたれていなければ，意識にのぼらない。
教員が「問題の論理的還元」を意識的に学習する経験をもつとすれば，それは，大学の学校教員養成コースにおいてである。
しかし，「問題の論理的還元」は，明示的に学習主題として学生に課した場合でも，学習成果ははかばかしくない。したがって，これが暗黙的な主題にとどまっているか，あるいはあまり / ほとんど触れられない場合は，「問題の論理的還元」を知らない教員が学校教員養成コースからアウトプットされることになる。

5.2 確認：量の問題の数学的還元
──例：「6÷ 3」の立式

5.2.0 要旨

「問題の還元」がどのようなものであるかを，ここで確認しておく。
例として，「6÷ 3」の立式に至る問題を５つ取り上げ，それぞれの「6÷3」への還元プロセスを示す。

5.2.1「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形

「6÷ 3」の意味は，つぎのようになる：

$$3 \times \square = \square \times 3 = 6$$

「6 ÷ 3」

また，「3× □」「□ × 3」の意味は，つぎのようになる：

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times \square"'] & 量_b \arrow[r, "\square"] & 量_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "\square \times 3"'] & 量_b \arrow[r, "3"] & 量_c \end{tikzcd}$$

そこで，つぎが「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形である：

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 量_b \arrow[r, "\square"] & 量_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 量_b \arrow[r, "3"] & 量_c \end{tikzcd}$$

5.2.2「６m のひもを３本に等分すると，１本何m？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	何mの3倍が6mか?
問題を図式化	$何\mathrm{m} \xrightarrow{3} 6\mathrm{m}$
「何m」「6m」を分析	$\underbrace{\mathrm{m} \xrightarrow{何} 何\mathrm{m} \xrightarrow{3} 6\mathrm{m}}_{6}$
「×」の文法	$\underbrace{\mathrm{m} \xrightarrow{何} 何\mathrm{m} \xrightarrow{3} 6\mathrm{m}}_{何 \times 3 = 6}$
「÷」の文法	何＝6÷3

5.2.3「６m のひもを何本に等分すると，１本３m？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	3mの何倍が6mか?
問題を図式化	$3\mathrm{m} \xrightarrow{何} 6\mathrm{m}$
「3m」「6m」を分析	$\underbrace{\mathrm{m} \xrightarrow{3} 3\mathrm{m} \xrightarrow{何} 6\mathrm{m}}_{6}$
「×」の文法	$\underbrace{\mathrm{m} \xrightarrow{3} 3\mathrm{m} \xrightarrow{何} 6\mathrm{m}}_{3 \times 何 = 6}$
「÷」の文法	何＝6÷3

5.2.4「1ヤードは3フィート。6フィートは何ヤード？」

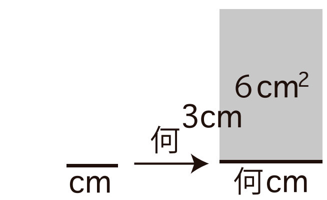
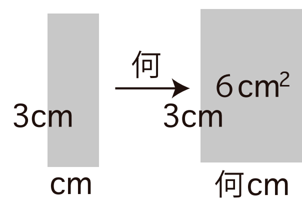
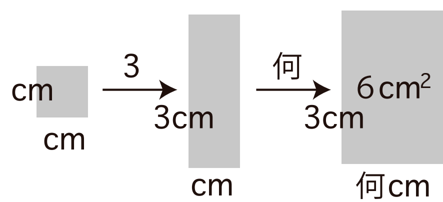
数式への還元のステップが，つぎのようになる：

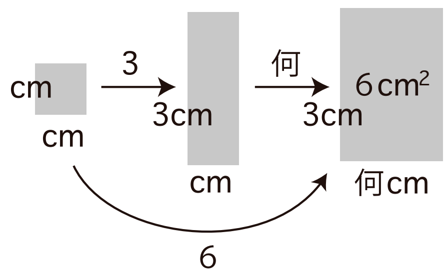
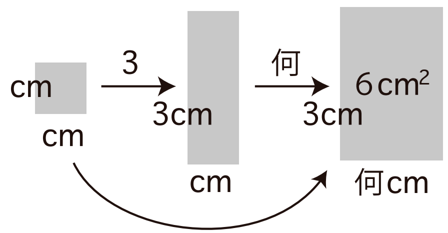
問題	ヤードの何倍が6フィートか?
問題を図式化	$\text{ヤード} \xrightarrow{何} 6\,\text{フィート}$
「6フィート」「ヤード」を分析	$\begin{tikzcd} \text{フット} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{ヤード} \arrow[r, "何"] & 6\,\text{フィート} \end{tikzcd}$
「×」の文法	$\begin{tikzcd} \text{フット} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3\times何=6"'] & \text{ヤード} \arrow[r, "何"] & 6\,\text{フィート} \end{tikzcd}$
「÷」の文法	何＝6÷3

5.2.5「面積が6 cm^2，タテの長さ3cm の長方形のヨコの長さは？」

ここでは，つぎのことを使う：

（＊）「*隣り合う2辺の一方の辺の長さを固定したとき，他方の辺の長さと面積は比例関係にある。*」

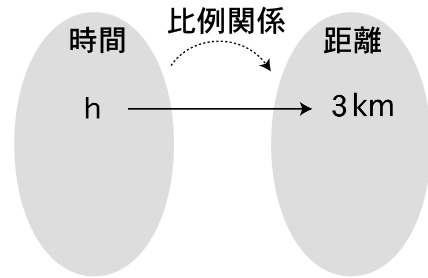
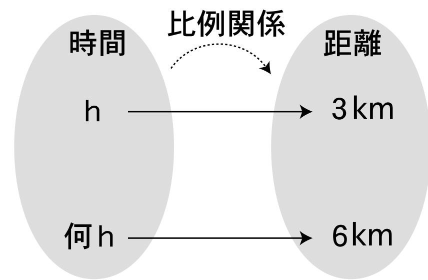
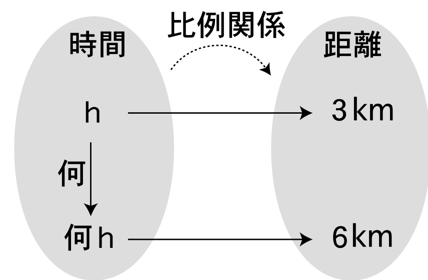
問題	タテの長さ3cm とヨコの長さ何cm で，面積が6 cm^2 か?
問題を図式化 「何cm」を分析	
(∗) を適用	
	

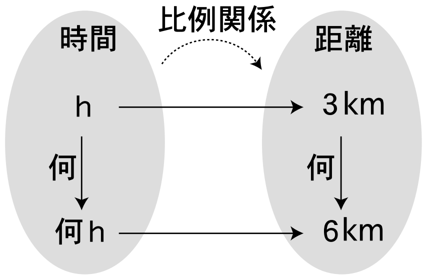
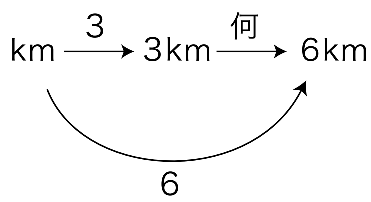
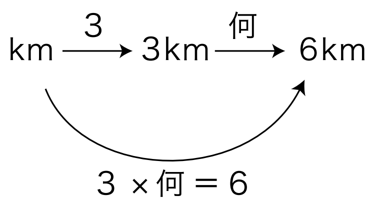
<table>
<tr><td>「6cm²」を分析</td><td>
</td></tr>
<tr><td>「×」の文法</td><td>

3 × 何 ＝6</td></tr>
<tr><td>「÷」の文法</td><td>何＝6÷3</td></tr>
</table>

5.2.6「3km/hの移動で6km進むのに要する時間は？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

<table>
<tr><td>問題</td><td>3km/h では, 何hで6km か?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問題を図式化</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>「何h」を分析</td><td>
</td></tr>
</table>

「比例関係」の適用	
倍関係の問題になる	$3\text{km} \xrightarrow{何} 6\text{km}$
「3km」「6km」を分析	
「×」の文法	
「÷」の文法	何＝6÷3

6.「数は量の抽象」に対する学術的理解の寄せ方

6.0　要旨

「数は量の抽象」を数学（「数は量の比」）の立場から論考すれば，それはすぐに終わってしまう。すなわち，「*それは*数学で*は*ない」で終わりになる。

「数は量の抽象」の論考には，もう一つの形がある。それは，文化人類学のアプローチである。
すなわち，「古代エジプトの分数についての研究」のようなスタイルで論考する。
「このような世界観がそこではもたれており，そしてこの世界観からこのような論が導かれてきた」を論考するわけである。

6.1　文化人類学的方法

6.1.1「数は量の抽象」の文化人類学的論考の余地

「数は量の抽象」は，きわめて混沌とした論である。
混沌は，「複雑」に錯覚されやすく，「複雑」は「緻密」とか「知的程度が高い」に錯覚されやすい。しかし，「数は量の抽象」の混沌は，あくまでも混沌である。
そしてこの混沌は，「数は量の抽象」の独自の世界観に因っている。

この世界観を共有しない者が「数は量の抽象」を論考する場合，つぎの２つの形がある：

A.「数は量の抽象」を，数学（「数は量の比」）と対比する。
B.「数は量の抽象」の世界観・文化を論考する。

A は，「*それは数学ではない*」で終わりになる論である。
B は，「数は量の抽象」に文化人類学的な学術的理解を寄せる論である。

6.1.2「数は量の抽象」の世界観

「数は量の抽象」の世界観は，つぎのものである：

1. 量が，実体として存在する。
2. 数は，量の抽象である。
特に，
数の ＋ は，量＋量 の抽象である。
数の × は，量 × 量 の抽象である。

数の操作はすべて，この世界観と整合させねばならない。
「整合」の理論づくりが取り組まれる。
この結果が，現前の「数は量の抽象」論であり，学校数学の「数と量」である。

「数は量の抽象」はきわめて混沌とした論である。
この混沌は，スタートにした世界観との整合を無理矢理つけようとした結果である。

例えば，「いまの宇宙は，一匹の魚から生じた」という世界観を以てこの宇宙を説明せよとなったとき，この論はとんでもなく混沌としたものになるはずである。

6.1.3「数は量の抽象」文化と＜数学＝外世界＞

数の操作の説明を「数は量の抽象」の世界観に整合させようとするとき，それはひどく混沌としたものになる。
ただし，混沌に棲む者は，混沌とは思っていない。
「*この世界はなかなかに難しい・奥深いゾ*」の思いで，自分の世界の解明に向かう。

混沌は，これの外に出てはじめて，混沌であることが認識される。
そして，このときの＜外＞になるものが，数学である。
数学は，混沌のクリアをひじょうにラディカルに行う。
「数は量の比」は，「数の現象の説明」という課題に対するラディカルな解決になっている。(§0.2 鳥瞰図 (「積・商の立式」のロジック))

数学 (「数は量の比」) のクリアと学校数学 (「数は量の抽象」) の混沌は，極端なコントラスを成す。改めて考えてみれば，これはきわめて＜異常＞な関係である。──この意味で，数学教育学的関心事になる。

おわりに

数学であれば「数は量の比」となるところを，学校数学は「数は量の抽象」にしている。
「数は量の抽象」は，数学ではない。学校数学の「数・量」の領域は，数学でない状態が続いてきた。
本論考は，この問題を取り上げた。

しかし，数学は「数は量の比」であるといっても，学校現場では「数は量の抽象」がすっかり定着している。これを揺るがすことは，ほとんど絶望的に難しく見える。
すなわち，部分的アプローチが立てられない。抜本的な変更の話になる。
そして，アウトプットに関して連続性を重視する学校教育に，＜抜本的変更＞話は馴染まない。

「割合論争」のときが，いわゆる「そのとき歴史が動いた」であったかも知れない。
和田義信の「数は量の比」対遠山啓の「数は量の抽象」の構図の論争の後，学校数学に入っていったのは「数は量の抽象」の方であった。——数学の視点からは，このような解釈になる。

本論考は，つぎの論考へと続く：

学校数学は「数は量の比」へ軌道修正できるか？

1.「数は量の比」を択ったときの指導内容は？
2. 学校数学が「数は量の比」になる可能性は？

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/me/instruction/subjects/number/qna/

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

「数」の数学と学校数学 (1)

数は量の比 ——「数は量の抽象」ではない

2008-12-08　初版アップロード (サーバー：m.iwa.hokkyodai.ac.jp)
2009-02-20　追加更新
2009-05-22　追加更新
2010-05-28　サーバー変更 (m-ac.jp)
2010-12-06　追加更新
2012-02-07　「本シリーズについて」を更新

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp