図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための

「数」の数学 対 学校数学 (4)

「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

Ver. 2012-04-16

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」の数学対学校数学 (4)

「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている

「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

を PDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は，「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの，＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの４になるものです。

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの趣旨は，読者が学校数学の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは，＜「数」がわかる本＞シリーズに後続する内容になっています。
学校数学の「数」は，数学の「数」とは違っています。特に，学校数学の「数」は，数学になっていません。学校数学の「数」に対するときは，このことを理解している必要があります。そして，このことの理解には，数学の「数」の理解が含まれるわけです。

「「数」がわかる本」シリーズは，現在かなり大部になっています。そこで，この内容の＜早わかり＞としてつぎのテクストを用意していますので，利用してください：

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

＜「数」がわかる本＞シリーズ　(数学の「数」)

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講
- 「小数」の数学

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズ　(イデオロギーの「数」)

- 数は量の比 ―「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か？―学校数学の「量」
- 学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要
- 「分数のかけ算・わり算」がペンキ塗りの話になるわけ
- 「数直線でかけ算･わり算」は, わかるのがおかしい (本テクスト)

＜「かけ算の順序」論争解説＞シリーズ　(モンスターの「数」)

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争――延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに

算数・数学の科目の内容は，明証的であると思われている。
算数・数学ができる・わかるとは，理に則って考えられることだと思われている。
翻って，算数・数学ができない・わからないとは，理に則って考えられないことだ，となる。
そして，理に則って考えられないのは，アタマがわるいからだ，となる。

ここで，もし算数･数学の科目の内容が決して明証的ではないとしたら，どうだろう？
生徒も授業者も，明証的でないものを明証的であると思い，自分のうちで明証的にしようとし，それができないことを自分のアタマのせいにしてしまう。
教員だったら，さらに，＜できなくてもできるふり＞を強迫観念にしてしまうかも知れない。

「分数・小数のかけ算・わり算」は，立式・計算のきまりの説明が，わからないものになる。
特に，「*数直線*」を使う説明は，わからないものになる。
そしてこの＜わからない＞は，内容がもともと明証的でないことが根本にある
このとき，＜できる・わかる＞とは説明を＜呑み込んだ＞ということであり，呑み込めないでいる者が＜できない・わからない＞者になっているということである。

本論考は，「数直線で分数・小数のかけ算・わり算」の非明証性が実際

どのようであるかを，論じようとするものである。
趣旨は，授業者が自分および生徒の＜できない・わからない＞を誤って判断してしまわないようにすることにある。

非明証性を見る方法は，明証的な「け算･わり算」との対照･対比である。
明証的な「かけ算・わり算」はどこにあるかというと，数学にある。
そこで，つぎが方法である：

> 学校数学の「数直線で分数・小数のかけ算・わり算」が内包する数学・非数学を同定し，
> これと「分数・小数のかけ算・わり算」の数学を対比する。

本論考は，これを行う。

本論考は, 論点を拡散させないために, ＜数学との対比＞のみを行う。「数直線でかけ算・わり算」の出自・沿革および現状況 (学習指導要領・教科書の内容等) には，触れない。

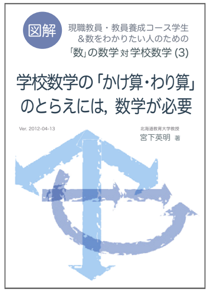
本論考が，「数直線でかけ算・わり算」の非明証性の内容として示すことになるものは，互いに関連し合うつぎの３点である：

1. 内包する数学の過剰・循環論法
2. 「形式不易の原理」「比の３用法」が＜存在法則＞にされることで，これの適用領域が明証無用領域になる。
3. ＜数は量の抽象＞の立場

本テクストの位置づけ

現時点では，本テクストはつぎのように位置づく：

『学校数学の「かけ算・わり算」
のとらえには，数学が必要』



『「小数」の数学』

『「分数のかけ算･わり算」が
ペンキを塗る話になるわけ』

『「数直線でかけ算･わり算」は，
わかるのがおかしい』

1. 「*数直線でかけ算・わり算*」が内包する数学

1.0　要旨

この章では，学校数学の「数直線でかけ算・わり算」が内包する数学を同定し，数学の「かけ算・わり算」との対比を行う。

「数直線でかけ算・わり算」は，つぎの考えを要素にしている：

- 「1と見る / 1あたり量」
- 「*数直線*」
- 「*数直線でかけ算・わり算*」
- ×」の意味：「かたまり × いくつ」「1あたり量 × いくつ分」

この各要素について，それが内包する数学を押さえる。
これによって示されてくるものは，数学の過剰と非在である

1.1「1と見る」「1あたり量」が内包する数学

1.1.1　「1と見る / 1あたり量」が内包する数学

学校数学に，「1と見る」という表現がある。
「*重さ 2/5 g を 1 と見る*」のように言う。

この「1と見る」と同じ意味のことばに，「1あたり量」がある。
「*2/5 g を 1 と見る*」は，「*2/5 g を 1 あたり量とする*」に言い換えられる。

「1と見る / 1あたり量」の「1」は，＜量としての数＞の1である。

→「量」の数学（『学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要』）

すなわち，「*2/5 g を 1 と見る*」「*2/5 g を 1 あたり量とする*」は，つぎの意味になる：

(N, ＋, ×) を，分数 (系) とする。
重さ (系) (($Q_{重さ}$, ＋), ×, (N, ＋, ×)) と＜量としての数＞ ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) の間の同型で，2/5 g に 1 が対応するものを立てる。――これは，つぎの対応になる：

$$(g \times 2/5) \times n \longmapsto n \qquad (n \in N)$$

1.1.2　＜形式感覚で立式＞の数学

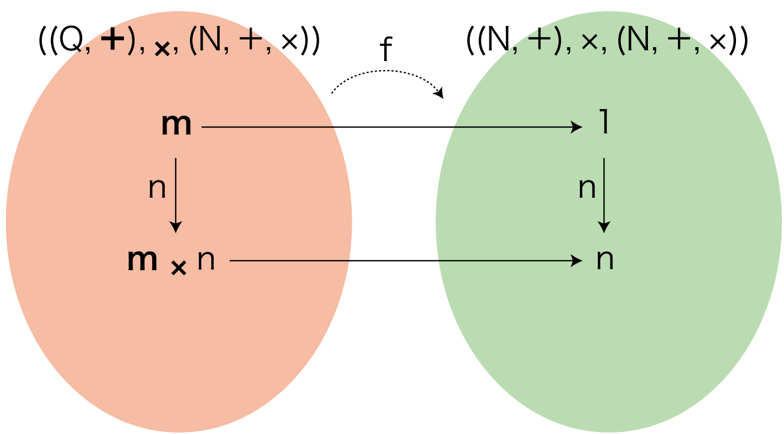
学校数学は，文章題に対する数の四則の立式に量の表現が入り込むことを，注意深く排除してきている。例えば，「2mのひもの3本分は，何mか？」の問題に対しては，「2× 3」を立式させ，(学校現場はいざ知らず)「2m × 3」は許していない。

一方，文章題を数の式に還元していく推理のプロセスは，指導内容に t とされていない。特に，単位を外して数のみにする推理のプロセスは，指導内容とされていない。《問題を見たら，それを裸にした数式を形式感覚で立てる》というふうになっている。
生徒は，「算数ができる」になるためには，この形式感覚を身につけねばならない。

＜単位を外して数のみにする＞は，数学としてなにをやっているのか？
生徒が自分の形式感覚にしていかねばならないこの数学は，どんな内容なのか？
量と＜量としての数＞の間に《単位に1を対応させる》同型を立て，この同型対応を以て，量の側の対象式・関係式を数の側に写す――これが，その数学である。
すなわち，つぎのようになる：

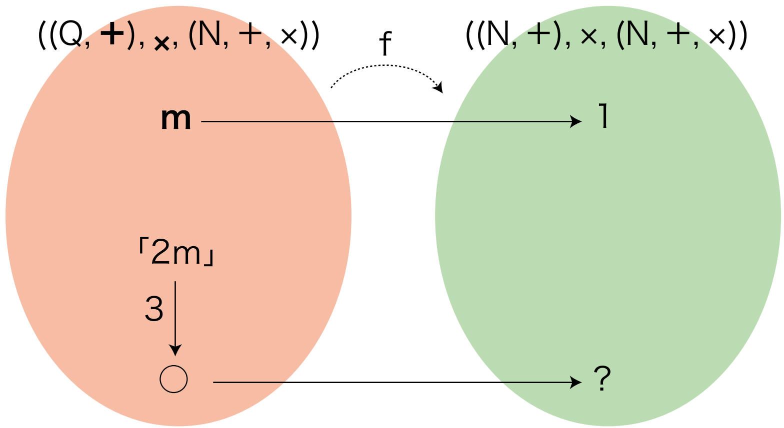
1. 量 (系) の＜長さ＞を，自然数係数で考える：
$$((Q, \mathbf{+}), \times, (N, +, \times))$$

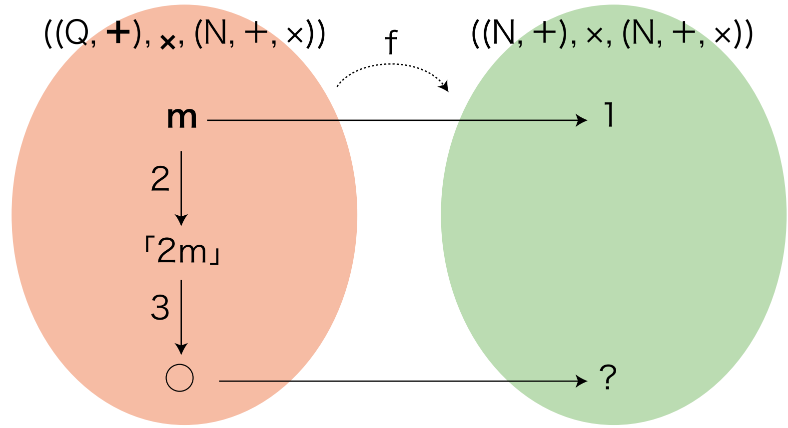
2. ＜長さ＞と＜量としての数＞の同型 f で，**m**（メートル）に 1 が対応するものを立てる：

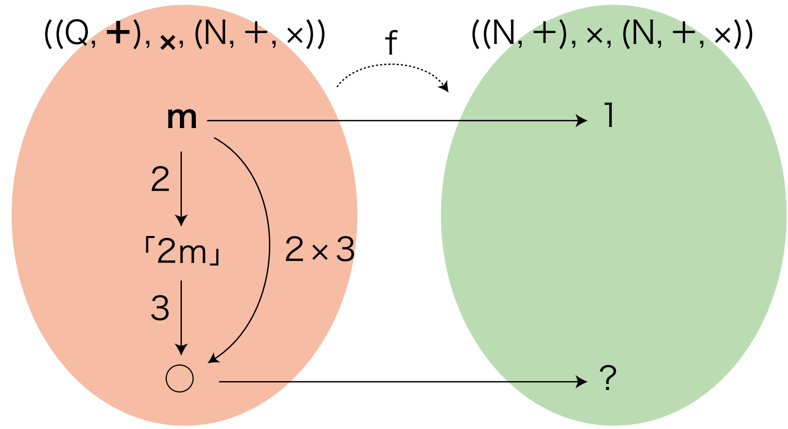


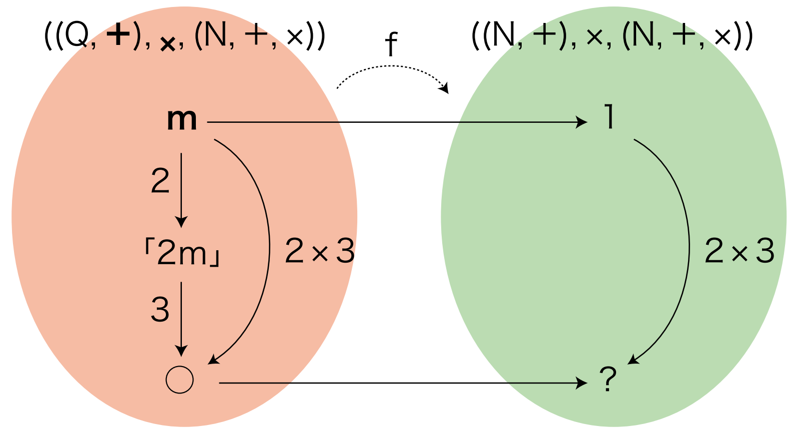
3.　f において，「2 m の 3 倍」には 2× 3 が対応する：

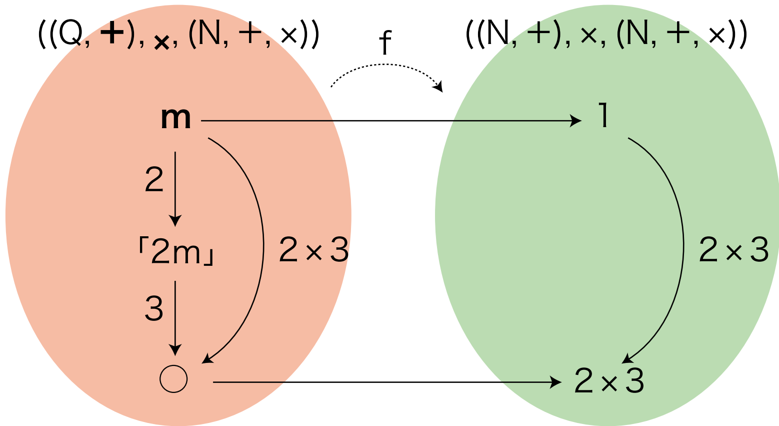
$$
\begin{aligned}
& f(\text{「}2\,\mathbf{m}\text{」} \times 3) \\
&= f((\mathbf{m} \times 2) \times 3) \\
&= f(\mathbf{m} \times (2 \times 3)) \\
&= f(\mathbf{m}) \times (2 \times 3) \\
&= 1 \times (2 \times 3) \\
&= 2 \times 3
\end{aligned}
$$





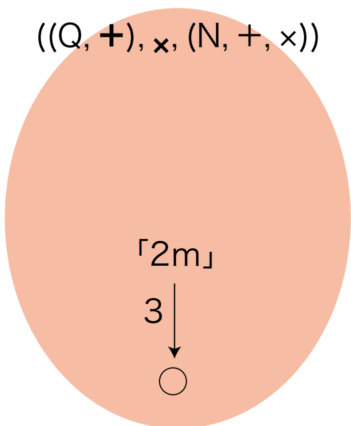


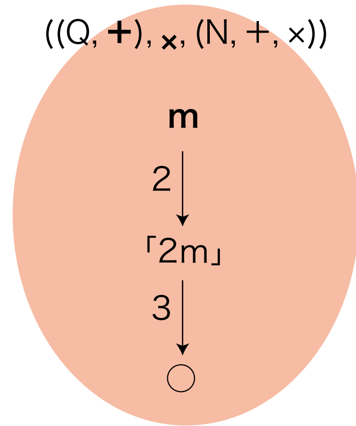


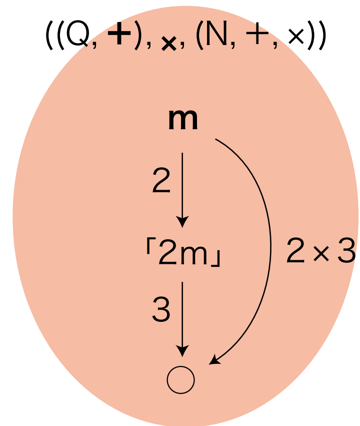


これに対し，数学の「量を数にする＝単位を除く」は，どのようになっているか。

「2× 3」の立式は，((Q, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) の側で済んでいる：







実際，量の系の中で倍関係を取り出したとき，それが数の積になっている。

「2× 3」の立式において，((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) の導入は余計なことである。

《量の系の内部で数式を現す》——これが数の方法であり，要諦である。

実際，数がこのように用いられることが，数が＜量の係数＞として量の

系の要素であることの意味なのである。
翻って，量の系の外に＜量としての数＞を措き，＜量としての数＞の中に数式を現すというのは，循環論法であり，無用・無駄のものである。

1.2「*数直線*」が内包する数学

1.2.0　要旨

ここでは「数直線」が内包する数学を押さえる。
この数学は，「代数的構造としての量の同型」「量の普遍対象――＜量としての数＞」の数学である。

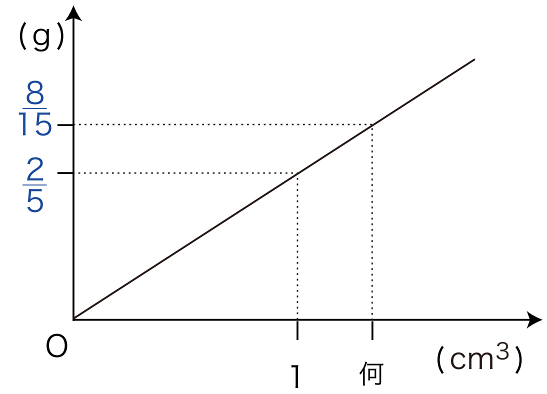
→「量」の数学（『学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要』）

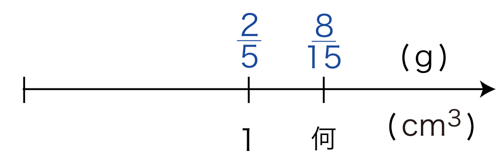
学校数学は，「数直線」を常用するようになってきているが，その使用は数学としては余計なプロセスということになる。
特に,「かけ算･わり算の式･計算法則」の導入に「数直線」を用いるのは,数学としては循環論法になる。

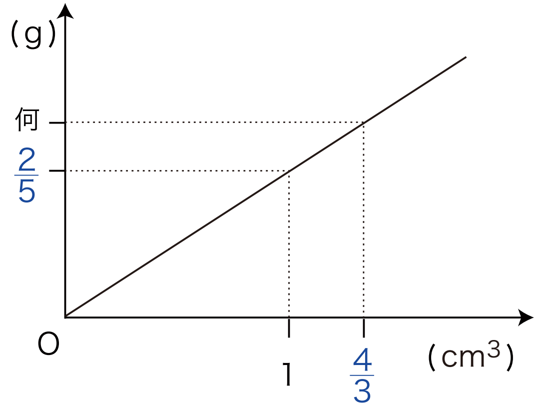
「数直線」は，教育的方便として合理化されるものである。
この捉えが重要である。

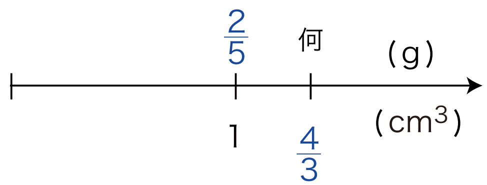
1.2.1「数直線」を描く意味

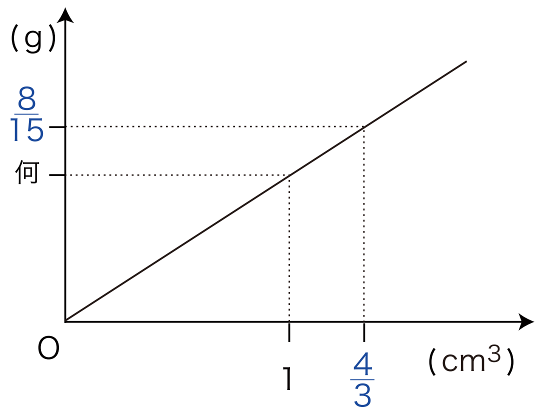
「数直線」は，比例関係のグラフ上の数値対応を書き出した格好になっている：

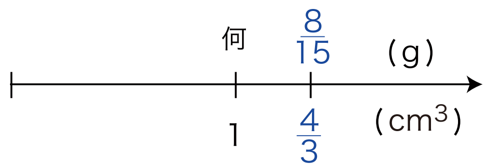












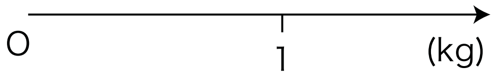
比例関係は，０への定値写像でなければ，量の同型対応になる。
同型対応は，対応する２量 (≠０) を一組定めれば，全体が決定する。
「数直線」を描くとは，量の同型対応を描くということである。

1.2.2　量の軸

「数直線」は，自分を「＜量＞の軸」と読ませる。体積の単位を添えたら＜体積＞の軸であり，重さの単位を添えたら＜重さ＞の軸である。

しかし，現にあるものは，＜長さ＞のものさしである。実際，描かれている目盛りを使って測れる量は，長さである。
では，これが＜体積＞や＜重さ＞の軸であるとは，どういうことか？
これの説明は，数学になる。
以下，これを確認する。

「＜重さ＞の軸」を例にする。
「＜重さ＞の軸」として描くのは，つぎのものである：



この軸の上に, 例えば「250 g」を目盛る場合, それはつぎの手順になる:

1. Oの点から 1 の点までの距離を求める。
　　——これを **u** とする。
2. kg に対する 250 g の比を求める。
　　——これは 0.25。
3. Oからの距離が **u** の 0.25 倍になる点を，軸上に求める。
　　——この点に，「0.25」を目盛る。

さて，これは数学として何をやっているのかというと，＜重さ＞と＜長さ＞の間の同型 (両者の＜量＞の構造に関する同型) を立てている。

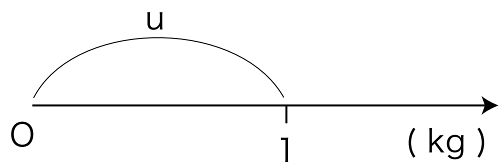
＜重さ＞と＜長さ＞を, それぞれ $((Q_{重さ}, \mathbf{+}), \times, (N, +, \times)), ((Q_{長さ}, \mathbf{+}), \times, (N, +, \times))$ とする。この例では，N は小数である。

＜重さ＞と＜長さ＞の同型対応は，つぎの条件を満たす写像 $f : Q_{重さ} \to Q_{長さ}$ である：

1. f は，$Q_{重さ}$ と $Q_{長さ}$ の間の 1 対 1 対応
2. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_{重さ})$
3. $f(\mathbf{x} \times n) = f(\mathbf{x}) \times n \quad (\mathbf{x} \in Q_{重さ},\ n \in N)$

ここで例にしている＜重さ＞の軸では，＜重さ＞と＜長さ＞の間の対応がつぎのようにつくられている：

1. kg に，任意の長さ **u** を対応させる
2. kg × n に **u** × n を対応させる (n∈ N)

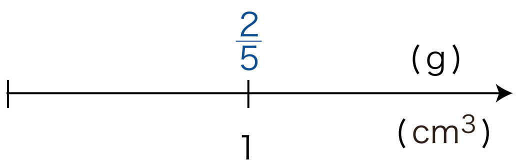


以上が，「量の軸を書く」の数学である。

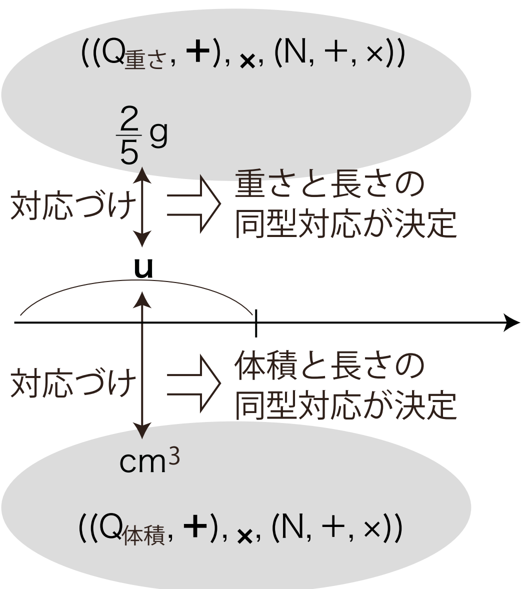
1.2.3　同型対応「数直線」の構造

＜量＞の軸をつくることは，＜長さ＞との間の同型対応をつくることである（→ § 量の軸）。そして，「数直線」は，＜長さ＞が媒介する二つの同型対応の合成というものになっている。

例えば，「数直線」



は，つぎの内容の表現である：

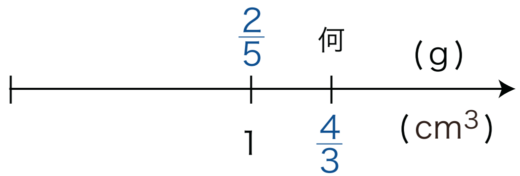


この「数直線」に，「4/3 cm^3 では何 g」の対応を書くときは，「同型対応」

の条件よりつぎの手順になる：

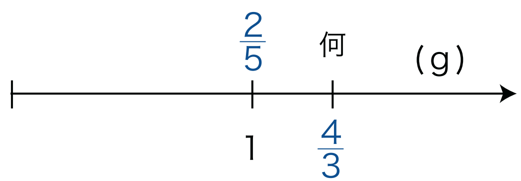
1. 端点から「1 cm^3」の目盛りまでの距離を，**u** とする。
2. 「1cm^3」に対する「4/3 cm^3」の比を求める。——これは 4/3。
3. 端点からの距離が **u** の 4/3 倍である点に，「4/3 cm^3」を目盛る。
4. この目盛りの上に「何 g」を書く。

こうしてつぎの図になる：



現行指導において「1 cm^3 が 2/5 g だと，4/3 cm^3 は何 g ？」の問題に対しつくることになる「数直線」が，これである。

２量の同型対応では，特に，＜量としての数＞が一方の側に使われることがある。——「1 cm^3 が 2/5 g だと，4/3 cm^3 は何 g ？」を「 1 が 2/5 g だと，4/3 は何 g ？」に替え，つぎの「数直線」を描く：



そしてこれを，「1 と見る / 1 あたり量」と称しているわけである。

1.2.4　比較：「線分図」

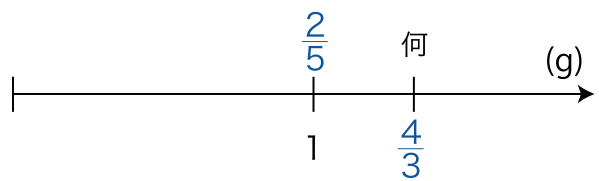
学校数学は，数の積の立式・計算の指導を，文章題から始める。
文章題には，比例関係の問題が用いられる：

「1cm^3 が 2/5 g のとき，4/3 cm^3 は何 g？」

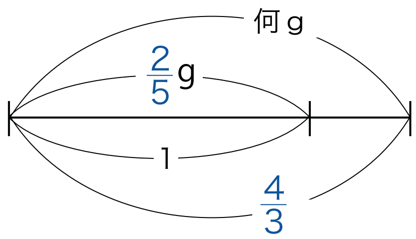
これを

「1 あたり 2/5 g は，4/3 だと何 g？」

に替える。――これの数学的意味は，＜体積＞を＜量としての数＞に替えるということ。
そして，つぎの「数直線」をつくる：



ところで，過去には，つぎの形の図 (ここでは「線分図」と称しておく) が指導されたこともある：



「数直線」と「線分図」には，違いがある。すなわち，見掛けの違いだけではなく，数学的な違いがある。

本テクストの主題からは外れるが，この内容をいちおう押さえておく。

「線分図」では,「1」「2/5 g」「4/3」「何 g」は, 量として表示されている。
これに対し「数直線」では，位 (くらい) として表示されている。
われわれは「時間」と「時刻」を区別するが，この区別が量と位の区別である。
量に対する位の関係を数学にすれば，「ベクトル」に対する「点」，空間でいえば「ベクトル空間」に対する「アフィン空間」というふうになる。

→ §「位」(『量計算の論理』)

1.3「*数直線でかけ算・わり算*」が内包する数学

1.3.0 要旨

ここでは,「*数直線でかけ算・わり算*」が内包する数学の押さえを行う。
既に済ませたつぎの数学の押さえが, これの準備になっている：

1. 「1と見る」「1あたり量」が内包する数学
2. 「*数直線*」が内包する数学

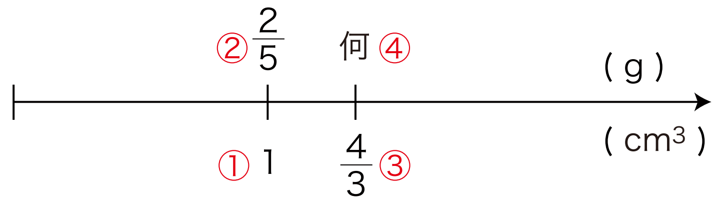
1.3.1「数直線でかけ算」が内包する数学

1.3.1.1「数直線でかけ算」の立式

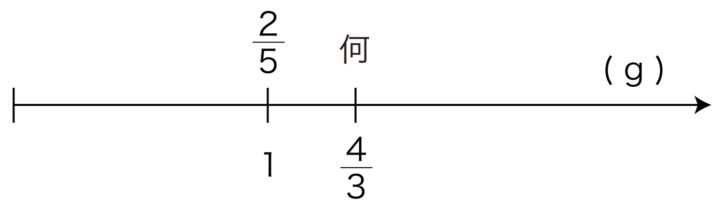
「分数･小数のかけ算」の立式･計算の指導は, 現行では文章題から始める。文章題には，比例関係の問題が用いられる：

「1cm^3 が 2/5 ｇの液体は，4/3 cm^3 だと何ｇ？」

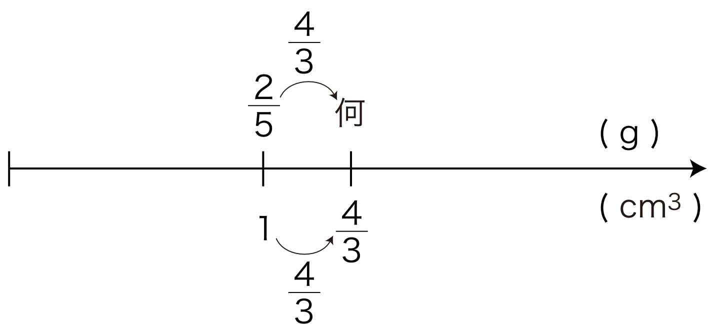
この問題に対し，「数直線」の図を，つぎの手順でつくる：



これは，与えられた文章題の＜体積と重さの比例関係＞の構造を，そのまま受け取って作図するやり方であるが，つぎのやり方もある。
すなわち, 問題を「1 あたり 2/5 ｇは, 4/3 では何ｇ？」のように読む。
そして，＜量としての数＞を下辺としたつぎの「数直線」を描く：



「数直線でかけ算」の立式指導は, この段階で「2/5 × 4/3」の立式に及ぶ。
あるいは，倍を書き入れたつぎの図を間に挿む場合もある：



数学だと，ここはつぎの明証を経て数の積の立式に至るところである：

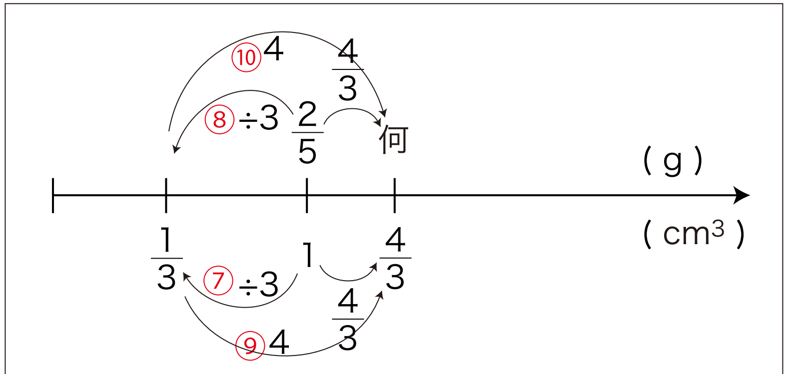
1. 最初の問題を「2/5 g の 4/3 倍が何 g」に還元するプロセス
2. 「2/5 g の 4/3 倍が何 g」を「2/5 × 4/3」に還元するプロセス

→「比例関係の文章題を解く」の推論
（『学校数学の「かけ算･わり算」のとらえには，数学が必要』）

現行は，1 を明証できない。内容が「比例関係」であり，そして「数直線」は「比例関係」を既習としないものになっているからである。
また，2 は明証無用になる。数の「×」の意味を「1 あたり量 × いくつ分」にしているからである。

1.3.1.2　計算の手順

数の積の立式が成ったら，つぎは計算である。
現行では，分数の積の計算は，「分数 × 整数」「分数 ÷ 整数」が既習になる。
例えば「2/5 × 4/3」だと，「(2/5 ÷ 3) × 4」に変形し，あとは既習に乗せるというふうになる。
立式に用いた数直線の上にこの計算を表すならば，つぎのようになる：



$$何 = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{5} \div 3 \times 4 = \frac{2}{5 \times 3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{5 \times 3}$$

しかし，これは非数学である。
実際，分数の「×」は，自然数の「×」と「÷」で定義されるのではない。
数学では，「分数 × 整数」「分数 ÷ 整数」は，「分数 × 分数」の後に来る。

→　§ 分数の求積公式を導く推論
　　§ 自然数の分数への埋め込み
（『学校数学の「かけ算･わり算」のとらえには，数学が必要』）

1.3.2「数直線でわり算」が内包する数学

1.3.2.1 「数直線でわり算」の立式

1.3.2.2　計算の手順

1.3.2.3 「第１用法」が「第３用法」よりも複雑

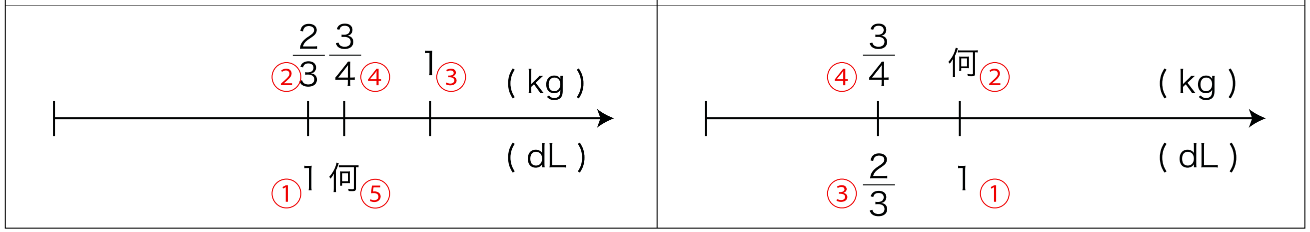
1.3.2.1　「数直線でわり算」の立式

以下, つぎの文章題を例にして,「数直線でわり算」がどういうふうになっているかを見ていく：

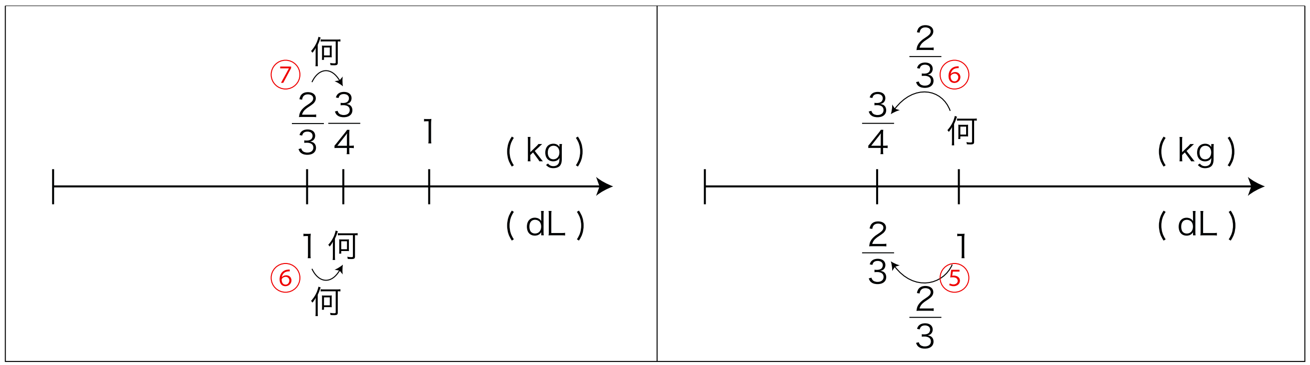
「1 dL が 2/3 kg だと，何 dL で 3/4 kg か？」
「1 dL が 何 kg だと，2/3 dL で 3/4 kg か？」

先ず，問題を表す「数直線」の図を，つぎの手順でつくる：

1dL が 2/3 kg だと , 何 dL で 3/4 kg ？	1dL が何 kg だと， 2/3 dL で 3/4 kg ？

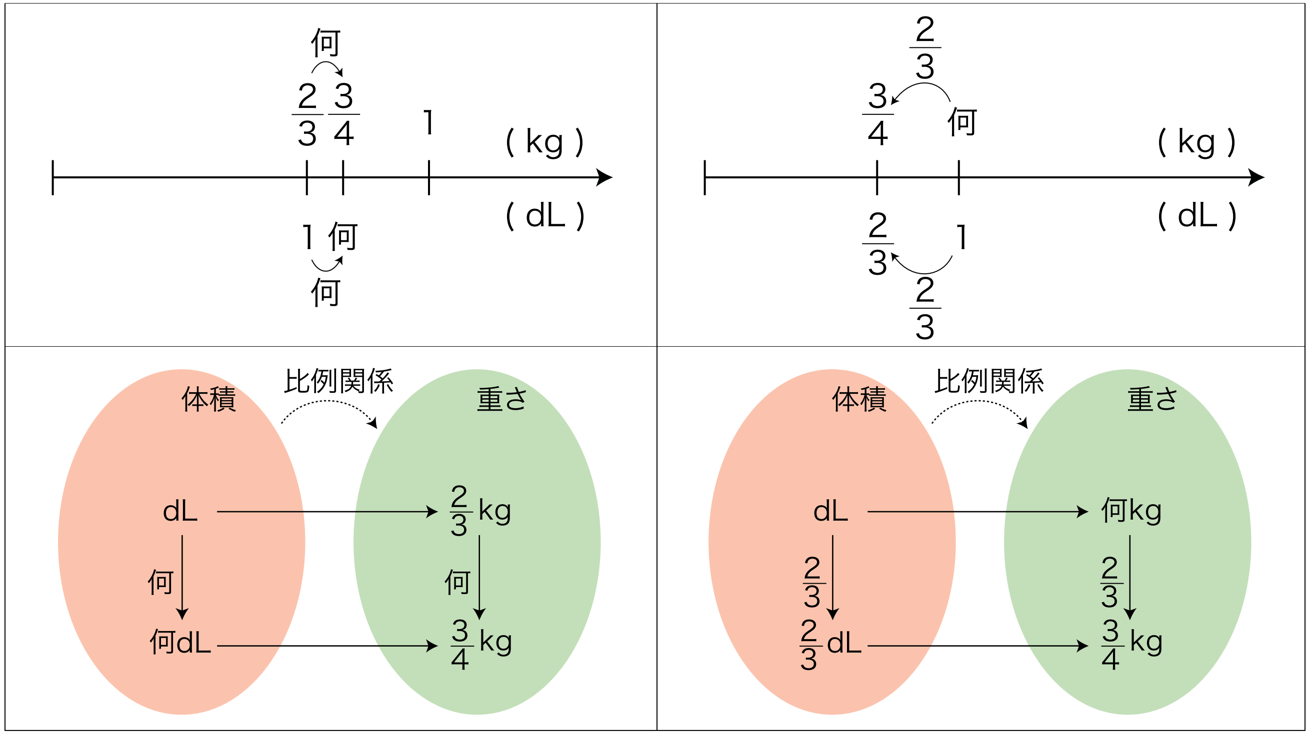


そして，つぎのように進める：

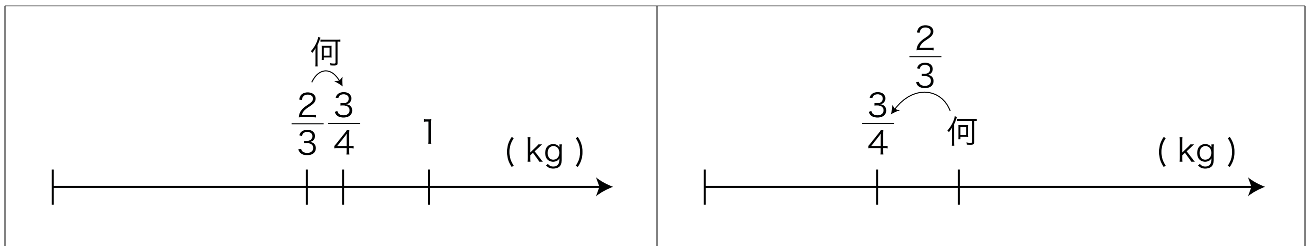


このロジックは，「比例関係」である。

実際,「数直線」は,比例関係の図を数直線スタイルで描いていることになる：



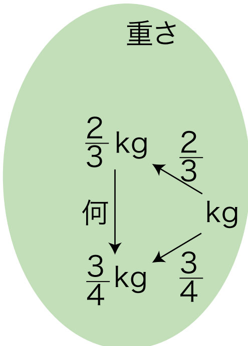
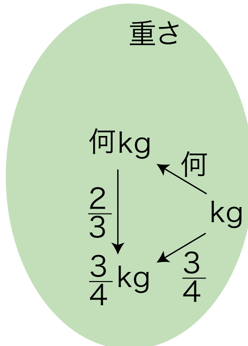
そして,「数直線」の上辺から,わり算の式を導く：



$$何 = \frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$$

「数直線」では，見かけ上，数がはだかになる。
実際には＜単位つき＞なのであるが，これが暗黙に外されている。
そしてこれが巧い指導的方便というものになって，数だけの式が立つ。

数学だと，《数をはだかにして，数だけの式を立てる》を推論として明示することになる。すなわち，つぎのようになる：

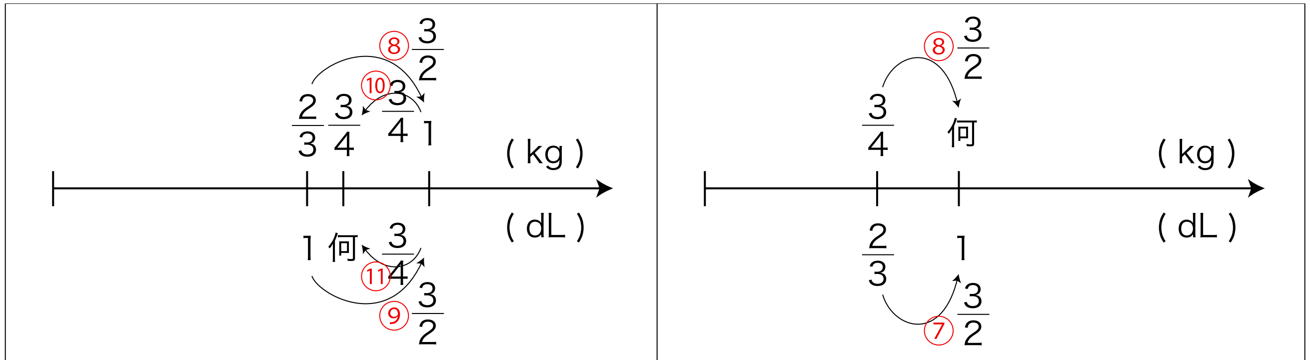
「○ kg」の分析		
「×」の文法	$\frac{2}{3} \times 何 = \frac{3}{4}$	$何 \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$
「÷」の文法	$何 = \frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$	

1.3.2.2　計算の手順

「分数 ÷ 分数」の立式は成ったら，つぎは計算である。
「分数 ÷ 分数」の立式を導くためにつくった図から，続けて「分数 ÷ 分数」の計算・公式を導く。

「分数 ÷ 分数」の計算・公式の導き方は，つぎのようになる：

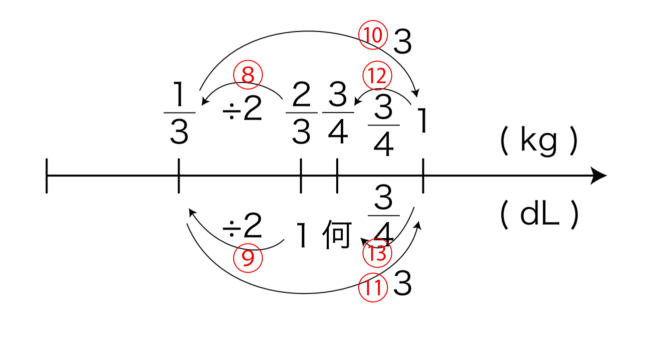
(1)「逆数」を用いる場合：



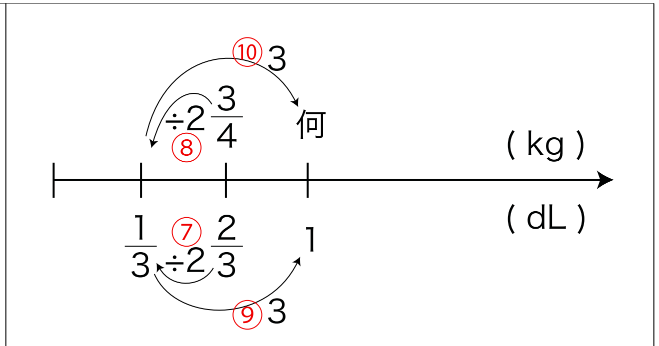
$$何 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$$

$$何 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$$

(2)　既習にしておいた「分数 × 整数」「分数 ÷ 整数」を用いる場合：



$$何 = 1 \div 2 \times 3 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$$



$$何 = \frac{3}{4} \div 2 \times 3 = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$$

数学の「分数のわり算の計算」は，つぎのようになる：

→ § 分数の求商公式を導く推論
（『学校数学の「かけ算･わり算」のとらえには，数学が必要』）

1.3.2.3「第１用法」が「第３用法」よりも複雑

「分数・小数のかけ算・わり算」の立式・計算の現行指導は，比例関係の文章題から始まる。この文章題は，比例関係にある２量それぞれの単位――単位$_a$，単位$_b$ ――に対するつぎの形をもとにする：

「１単位$_a$ に ○ 単位$_b$ が対応するとき，
△ 単位$_a$ には □ 単位$_b$ が対応する。」

例えば，液体の体積 (かさ) と重さの比例関係で，それぞれの単位に dL，kg をえらぶときは，つぎの形がもとになる：

「１dL が ○ kg だと，△ dL で □ kg。」

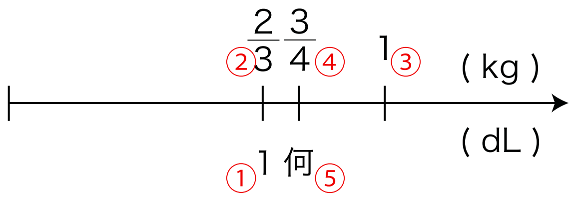
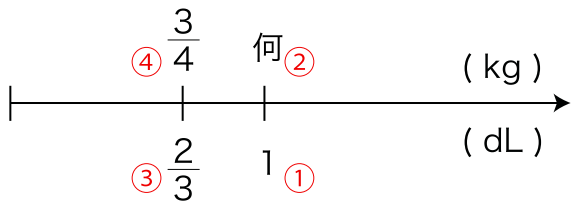
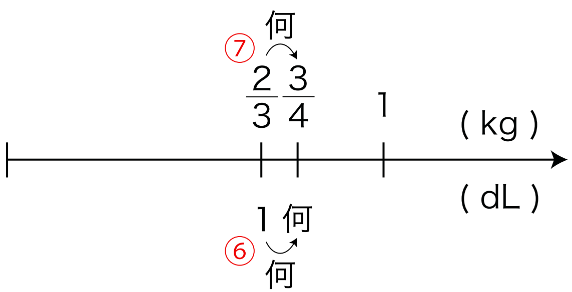
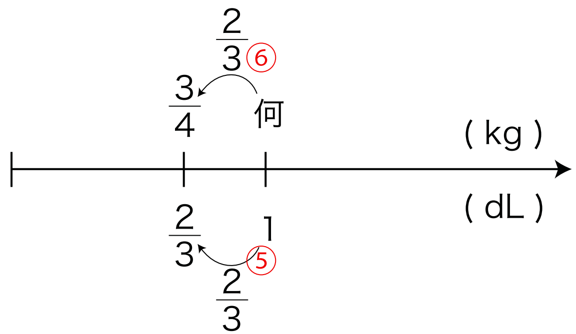
この形から，つぎの３通りの文章題が導かれる：

A. 「１dL が ○ kg だと，△ dL で 何 kg か？」
B. 「１dL が ○ kg だと，何 dL で □ kg か？」
C. 「１dL が 何 kg だと，△ dL で □ kg か？」

A が，「かけ算」の文章題になり，B, C が「わり算」の文章題になるわけである。さらに，「比の３用法」のことばを用いるならば，B は「第１用法」タイプ，C は「第３用法」タイプである。

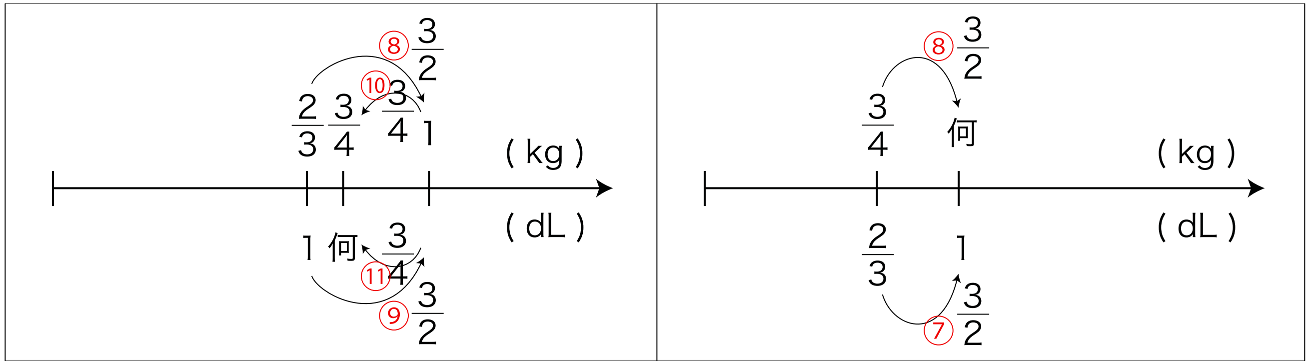
タイプの違いは，立式・計算の複雑さの違いになって現れる。
すなわち，「第１用法」の方が「第３用法」よりも，「数直線」の図式操作の上で，考え方がより難しくなったり，手順がより複雑になる：

(1) 立式

「第 1 用法」適用タイプ文章題	「第 3 用法」適用タイプ文章題
1dL が 2/3 kg だと , 何 dL で 3/4 kg ?	1dL が何 kg だと， 2/3 dL で 3/4 kg ?
	
	
$\frac{2}{3} \times 何 = \frac{3}{4}$	$何 \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$
$何 = \frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$	

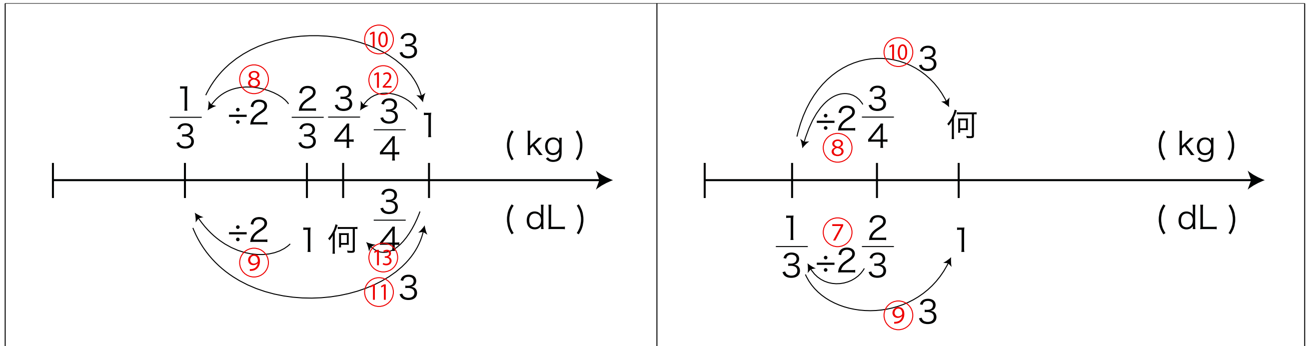
(2) 計算

(2-1)「逆数」を用いる場合：



何 $= \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$	何 $= \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$

(2-2)　既習にしておいた「分数 × 整数」「分数 ÷ 整数」を用いる場合：



何 $= 1 \div 2 \times 3 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$	何 $= \frac{3}{4} \div 2 \times 3 = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$

1.4　記号「×」の意味指導が内包する数学

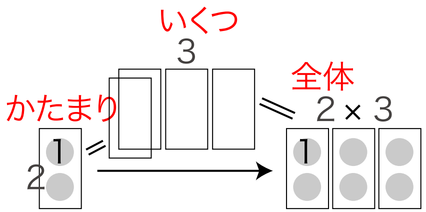
1.4.0　要旨

「かけ算」の指導は，本来，記号「×」の意味を伝えることから始まる。
実際，「かけ算」の立式・計算は，「×」の意味に則って行うことになる。

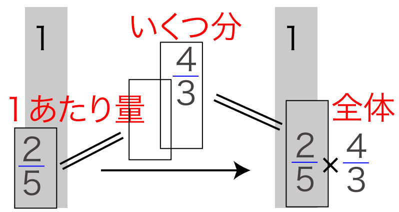
「×」の意味指導には,「かたまり × いくつ」と「1 あたり量 × いくつ分」の２タイプが認められる。
ここでは，それぞれどんな数学（実際は，非数学）を行っていることになるのかを，押さえる。

1.4.1「かたまり × いくつ」の場合

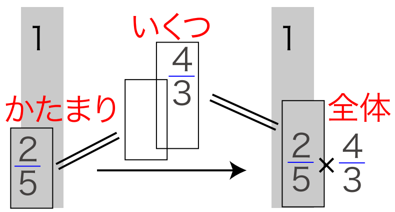
つぎは,「かたまり × いくつ」の図式である：



数を自然数から分数 / 小数に替えるとき, この図式はつぎのようになる:



また, このときは「かたまり」の表現では通じなくなるので,「1 あたり量」の表現が使われてくる：



これらの図式は,「かたまり」「いくつ」それぞれにおいて,《もとにする量とそれに対する比を, むりやり合わせて一つの絵にする》ことをし

ている。

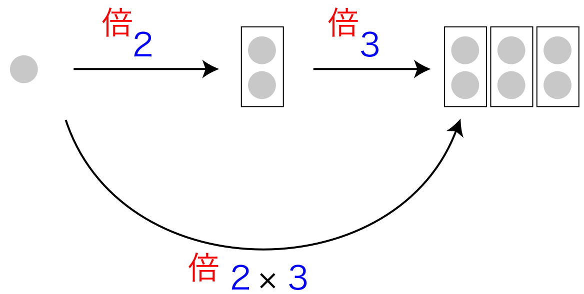
なぜこのような絵にするのか？

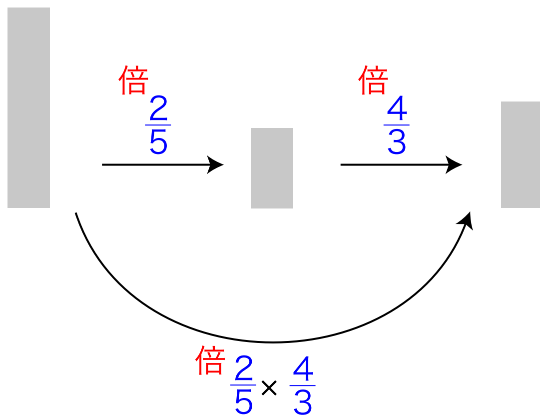
《数の積は, 量の積の抽象》を立場にしているから, ということになる。

(「数の積は量の積の抽象」については, §「＜数は量の抽象＞は, ＜数の積は量の積の抽象＞」で論じる。)

数学は,「数の積は倍の合成」である。

積の図式は, もとにする量とそれに対する比 (倍) が別の対象として描かれる：

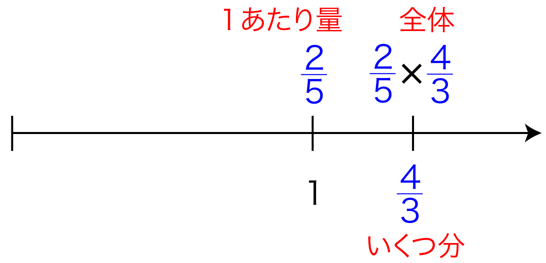




この数学の図式に見るべきは，理論を構成的に組み上げる方法にはシンプルな図式の実現が対応するということである。
翻って，込み入った図になるのは，内容が構成的 / 理論的につくられていないためである。

1.4.2「*1 あたり量 × いくつ分*」の場合
——「＜比例関係＞と＜量＞の複比例」の数学

数の積の意味が生徒に伝えられる形は，一つに「*かたまり × いくつ*」である。そしてもう一つが，つぎの「*数直線*」が説明図式として用いられるところの，「*1 あたり量 × いくつ分*」である：



以下，この「1 あたり量 × いくつ分」の数学を示す。

体積(系)，重さ(系) を，$((Q_{\text{体積}}, +), \times, (N, +, \times))$，$((Q_{\text{重さ}}, +), \times, (N, +, \times))$ とする。
体積と重さの間の比例関係全体は，量になる：

$$((\mathrm{Hom}(Q_{\text{体積}}, Q_{\text{重さ}}), +), \times, (N, +, \times))$$

ここで：

1. $f, g \in \mathrm{Hom}(Q_{\text{体積}}, Q_{\text{重さ}})$ に対し，
   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in Q_{\text{体積}})$$
2. $f \in \mathrm{Hom}(Q_{\text{体積}}, Q_{\text{重さ}})$，$n \in N$ に対し，
   $$(f \times n)(x) = f(x) \times n \quad (x \in Q_{\text{体積}})$$

→ § 比例関係は量になる
（『学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要』）

「1 あたり量 × いくつ分」は，「×」の意味を，Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) × $Q_{体積}$ の $Q_{重さ}$ への写像：

$$(f, \mathbf{x}) \longmapsto f(\mathbf{x}) \quad (f \in \mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ}),\ \mathbf{x} \in Q_{体積})$$

に定めていることになる。

なぜ，ここで「×」の登場になるのか？
この写像（F とする）は，<u>複比例関数</u>になっている。
そして，$Q_{体積}$ と $Q_{重さ}$ の単位を定め，この単位に準じて Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) の単位を定めるとき，F から導かれる数値の関数：

（体積単位あたり重さの数値，体積の数値）$\longmapsto$ 重さの数値

は，２数にその積が対応するものになる：

例えば，体積の単位に cm^3，重さの単位に g をとるときは，
g /cm^3 を Hom(Q 体積 , Q 重さ) の単位にする。 このとき，

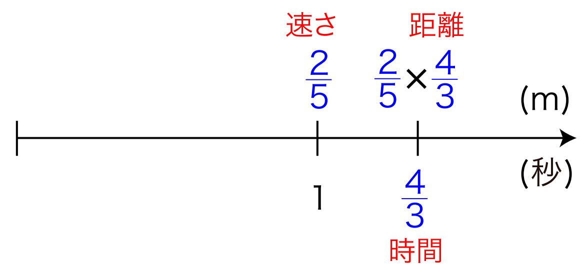
$$
\begin{aligned}
& F\,(g/cm^3 \,_\times\, 2,\ cm^3 \,_\times\, 3) \\
&= (g/cm^3 \,_\times\, 2)\,(cm^3 \,_\times\, 3) \\
&= (g/cm^3)\,(cm^3) \,_\times\, (2 \times 3) \\
&= g \,_\times\, (2 \times 3)
\end{aligned}
$$

この結果を見て，「×」を使っているわけである。

註：この「×」を「積」と読ませる数学を求めるならば，「テンソル積」がこれにあたる。
（→「2 個 / 皿 × 3 皿 ＝ 6 個」の数学：テンソル積）

このように，「1 あたり量 × いくつ分」における数の積の立式は，これを数学にすると，「F(f, x) に対する数の積の立式」ということになる。
もっとも，「数の積は量の積の抽象」の立場では，数の積の立式は直接的であり，式の導出の明証は無用のものになる。
実際，「抽象」を謂う所以である。
「抽象」は，「存在の事実の捉えとこれの記述」であるから，明証するというものではないわけである。

註：「1 あたり量 × いくつ分」は，「数の積は量の積の抽象」の立場である。そして，「数の積は量の積の抽象」の立場は，＜数は量の抽象＞の立場である。
＜数は量の抽象＞は，「量の積」として「1 あたり量 × いくつ分」の概念を立てる。そして，この「量の積」の意味を，「内包量と外延量の積」とする。
「内包量」が「1 あたり量」と同じものであることを，「速度」を例に，見ておこう。「速度」は，＜数は量の抽象＞の立場において，内包量となる。そして，「速度」の図式は，つぎのように「1 あたり量」の図式に他ならない：



ところで，「内包量」は，「足せない」で特徴づけられている。特に，

内包量である速度は，足せない。
一方，「内包量」は，比例関係に他ならない。したがって，これは量になる。足したり倍したりできる。実際，われわれは，速度を日常的に足したり倍したりしている。
このように，「内包量」は，＜数は量の抽象＞が自家撞着を曝す主題になっている。ただし，この自家撞着を見て取るには，数学が必要になる。

1.4.3　関連：「かけ算の順序」

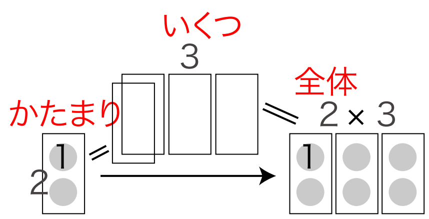
かけ算の立式については，「かけ算に順序はある」と「かけ算に順序はない」の間の論争が現前している。

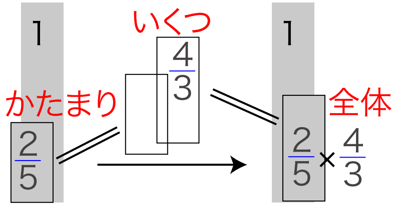
→『「かけ算の順序」論争概説』
（「かけ算の順序」の数学とイデオロギーとモンスター）

そしてこの論争での「かけ算に順序はある」の立場は，「かたまり × いくつ」「*1 あたり量 × いくつ分*」の順序がかけ算の順序であると主張するものである。
以下，この主張が保てるものかどうかを見ていく。

(1)**「かたまり × いくつ」の場合**

数の「×」の意味を「かたまり × いくつ」にする立場は，同時に「*この順序がかけ算の順序である*」と主張する立場である。そして「かたまり × いくつ」の場合,「かけ算の順序」は確かにこの順序の他ではなくなる。
実際,「かたまり × いくつ」の図式では,「かたまり」の絵の前に「いくつ」の絵をおくことはできない。





そしてこの順序は，数学の「かけ算の順序」と一致する。
しかし，この符合は，単に，数学の「かけ算の順序」を見て「かたまり × いくつ」を発案したためである。
実際，「かたまり × いくつ」は，自身の系の中で「かけ算の順序」を明証的にすることはできない。存在論として自分を立てているからである。

(2)「*1 あたり量 × いくつ分*」の場合

「*1 あたり量* × *いくつ分*」は，つぎのような形を指す：

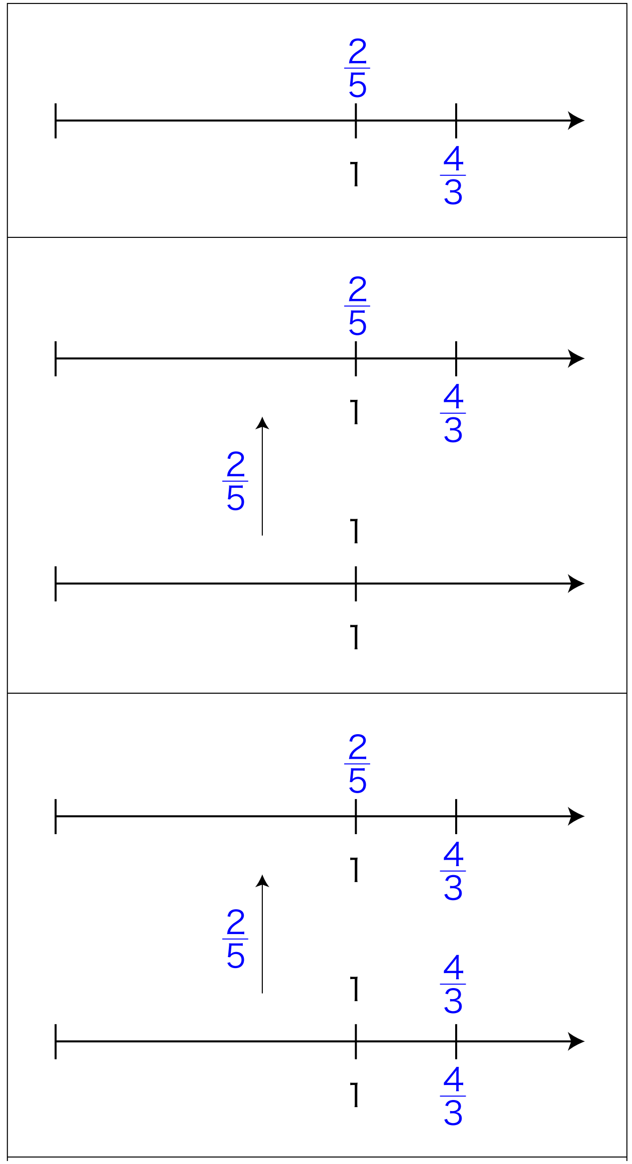
「 2/5 g/cm^3 × 4/3 cm^3」

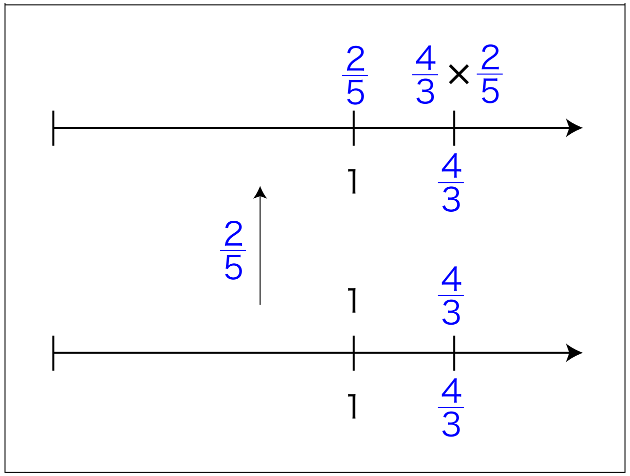
そしてこれに対し，「2/5 × 4/3」が立式される。

この立式を数学として行うと，つぎのようになる：

「 2/5 g/cm^3 × 4/3 cm^3」
＝ (g/cm^3 × 2/5) (cm^3 × 4/3)
＝ (g/cm^3 (cm^3 × 4/3)) × 2/5
＝ (g/cm^3 (cm^3) × 4/3) × 2/5
＝ g × (4/3 × 2/5)
＝「(4/3 × 2/5) g」

また，この手順を「数直線」に表すことにすると，つぎのようになる：



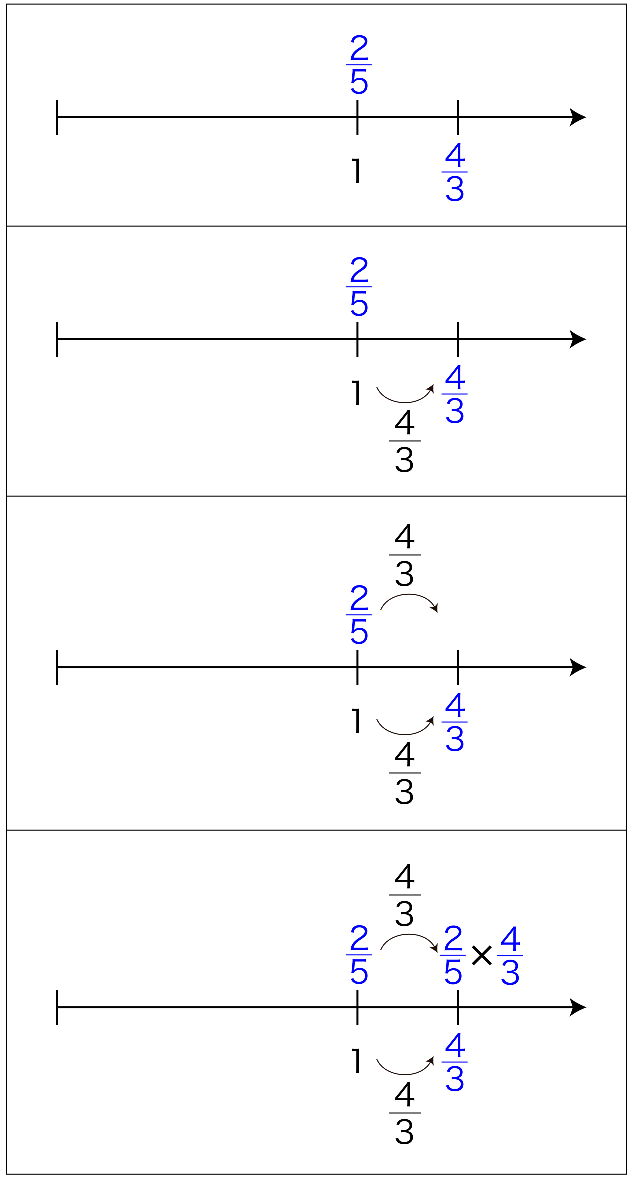


ここで，「*1 あたり量 × いくつ分*」での 2/5 と 4/3 の順序が，数の積の式では逆になった。

「*1 あたり量 × いくつ分*」の順序と積の式の２数の順序を同じにしたいならば，g/cm^3 × 2/5 が比例関係であることを先に適用して，つぎの流れに替えることになる：

「 2/5 g/cm^3 × 4/3 cm^3」
＝ (g/cm^3 × 2/5) (cm^3 × 4/3)
＝ (g/cm^3 × 2/5) (cm^3) × 4/3
＝ (g/cm^3 (cm^3) × 2/5) × 4/3
＝ g × (2/5 × 4/3)
＝「(2/5 × 4/3) g」

「*数直線*」だと，つぎの手順の作図になる：



このように，「×」の意味を「*1 あたり量 × いくつ分*」にするとき，数の積の式での２数の順序が定まらない。

特に,「*1あたり量 × いくつ分*」を立場にすることは,「かけ算に順序はない」を引き受けることである。
「*1あたり量 × いくつ分*」を立場とする者が「かけ算の順序」論争の場に進出するときは,「*かけ算に順序はない*」と言わねばならないのである。

2.「数直線でかけ算・わり算」の＜非明証性＞の要素・内容

2.0　要旨

ここまで，「*数直線でかけ算・わり算*」が内包する数学と非数学を押さえてきた。そしてこの内容が，「*数直線でかけ算・わり算*」の非明証性の説明になる。
すなわち，数学の過剰がある一方で数学の非在があるというのが，非明証性の構造である。

ここで数学の過剰をつくっているものは，＜数は量の比＞を択らないとする立場である。
数学の非在をつくっているものは，＜数は量の抽象＞の立場である。

2.1　数学の過剰――＜数は量の比＞迂回の様態

2.1.1　「*数直線*」が数学の過剰に

学校数学は，数学の＜数は量の比＞を択らないことを立場にしている。択るのみであるものを択らないので，無理・余計をやってしまうことになる。
「*数直線*」は，この余計のものの一つである。

「*数直線*」は，２量の同型対応であって，視覚化した＜長さ＞との同型を間に挿む形のものである。
上下辺での要素の配置を，比を視覚化しつつ，線型に配置する。
この《＜長さ＞との同型を間に挿む》は，無用なプロセスである。
同時に，高度な内容の数学の使用である。

また，「*数直線でかけ算・わり算*」の数学は，分数・小数の代数構造——特に「かけ算」——を要素にしている。したがって,「数直線」を使って分数・小数のかけ算・わり算の式を導き，計算法を導くことは，数学においては循環論法（《既に系の要素になっているものを，系を用いてつくりだす》）になる。

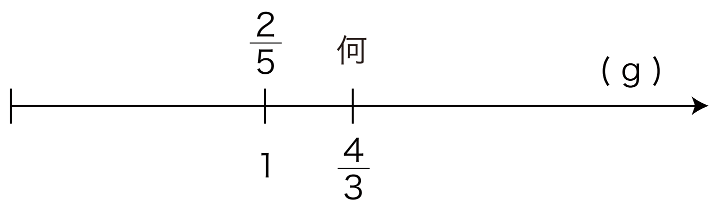
学校数学の「*数直線でかけ算・わり算*」が内包する数学は,「分数・小数のかけ算・わり算」の本来の数学に対し,「無用」「循環論法」「内容が数学的に高度」の意味で, 過剰である。そしてこの「数学が過剰」が,「*数直線でかけ算・わり算*」の＜非明証性＞の内容の一つになる。
実際,「無用」「循環論法」であるから，明証を求めるとおかしなことになる。
「内容が数学的に高度」であるから，この数学は明示できるものにならない——暗黙に・感覚的に扱うことになる。

「*数直線*」は，専ら指導的方便として合理化されるものである。この捉えが肝心である。

2.1.1　「１と見る」が数学の過剰に

「*数直線*」では，＜量としての数＞が下辺の量に使われる場合がある。この「*数直線*」が，「１と見る」「１あたり量」のことばの意味になるものである。

「*数直線*」における数学の過剰は，下辺が＜量としての数＞の「*数直線*」の場合，「下辺の無用」を加えるものになる。
実際，「*数直線*」：



は，「2/5 ｇの 4/3 倍は何ｇ」の表現であり，そして，「2/5 ｇの 4/3 倍は何ｇ」を「*数直線*」に表すことは，数学として空回りするプロセスになる。

この「数直線」の指導的意義は, 一つに「２つの重さの相対的位置関係が, ２つの長さの相対的位置関係として理解される」である。ただし，この内容は，同型の数学であるから，明証的に扱えるものにはならない。

指導的意義のもう一つは，指導的方便として非数学を行うというものである。分数倍を「÷ 整数 × 整数」の非数学に替える操作が，「*数直線*」の上で演じられる (→ § 計算の手順)。

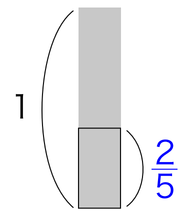
2.2　数学の非在──＜数は量の抽象＞の立場

2.2.0　要 旨

「数直線」と数の積の立式の間には，量の単位を外すプロセス（推論）がある。
学校数学は，「数直線」から直ちに数の積の立式に及ぶ。
これについては，教育的方便（「指導不可能な内容はスキップ」）としてこれを行う立場の他に，「数直線」に表されている「1 あたり量 × いくつ分」を数の積の意味にする立場を，あわせて見ることになる。
後者は，＜数は量の抽象＞の立場である。
ここでは，この立場の押さえを行う。

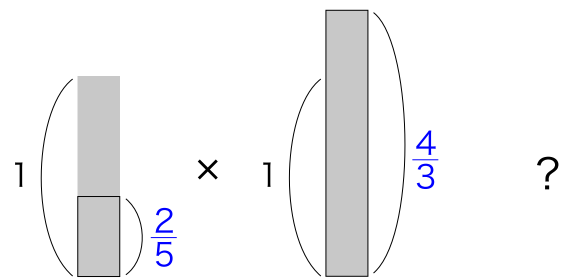
2.2.1　＜数は量の抽象＞は＜数の積は量の積の抽象＞

＜数は量の抽象＞とは，量をリアルの側に措き数を量の抽象と定める立場である。
この立場では，数は量の絵に表現されるものになる。
例えば分数「2/5」は，つぎの絵になる：



しかし，いろいろな大きさの「2/5」の絵が描けるように，「2/5」は量を表しているのではなく，量の比を表している。
＜数は量の比＞であるのにこれに抗って＜数は量の抽象＞を立てるのは，無理なスタンスである。
この無理なスタンスは，「かけ算」の意味づけでいっきに苦しいものになる。

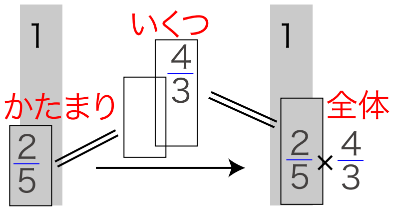
数が量の抽象だとすると，数の積は量の積の抽象でなければならない。
たとえば，「2/5 × 4/3」をどう考えたらよいか？
つぎのようだと，意味が立たない：



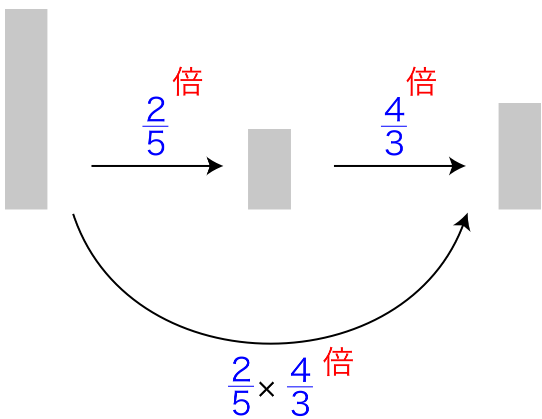
<数は量の抽象>はここで，つぎの理屈を出してくる：

「数の積は，１あたり量 × いくつ分 の抽象である。
１あたり量，いくつ分 は，異なるタイプの量 (内包量と外延量)
であるが，いずれにしても量である。
というわけで，数の積は量の積の抽象である。」

そして，「2/5 × 4/3」の図式が，「かたまり × いくつ」でみてきたつぎのものになる：



数学には「量の積」はない。
「数の積」は<倍の合成>が意味となり，図式もそのようになる。



2.2.2「比の３用法」「形式不易の原理」: <明証無用>の装置

<数は量の抽象>は，量をリアルの側に措く写像理論である。
数は量の写像であり，数の算法は量の<存在の事実>の写像 (<リアルの写し>) である。
分数・小数のかけ算・わり算」指導は文章題で始められるが，<数は量の抽象>の立場では，「かけ算・わり算」は<リアルの写し>として導入するのみだからである。

この指導は，「比の３用法」「形式不易の原理」を暗黙に使うものになっている。実際，以下に示すように，このときの「比の３用法」「形式不易の原理」は<数は量の抽象>の内容になる。

「比の３用法」は，つぎの述定である：

量の<存在の事実>に，「２ｇの３倍は６ｇ」がある。
自然数の「×・÷」は，この事実の抽象をつぎの形に表すと決めたことで定まるところのものである：

　　３ ＝ ６ ÷ ２　(第１用法)
　　６ ＝ ２ × ３　(第２用法)
　　２ ＝ ６ ÷ ３　(第３用法)

量の<存在の事実>に,「2/5 ｇの 4/3 倍は 8/15 ｇ」がある。
分数の「×・÷」は，この事実の抽象をつぎの形に現すと決めたことで定まるところのものである：

4/3 ＝ 8/15 ÷ 2/5　（第１用法）
8/15 ＝ 2/5 × 4/3　（第２用法）
2/5 ＝ 8/15 ÷ 4/3　（第３用法）

「比の３用法」には「形式不易の原理」が伴っている。このときの「形式不易の原理」は，つぎの述定である：

> 分数の「×・÷」の用法が自然数の「×・÷」の用法と同じになるのは，量がこのような存在だからである。

この場合の「比の３用法」「形式不易の原理」は，これに対し「なに・なぜ？」を言うものではない。＜リアルの写し＞として，そのまま受け入れるものである。

＜リアルの写し＞は，これの適用領域が明証無用領域になるため，非明証性のもとになる。
実際，＜数は量の抽象＞では，立式は形式感覚ないしノウハウで立てるものになる。

数学では，「×・÷」の「形式不易の原理」は，つぎの内容になり，明証的である：

> 数の各系（自然数，分数，正負の数，複素数等）の「×・÷」は，つぎが成り立つようにつくられる：

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & \bullet \arrow[r, "n"] & \bullet \end{tikzcd}$$

m×○＝○×m＝n

「n÷m」

そして「比の３用法」は，記号「×・÷」の文法に他ならない。

おわりに

「分数・小数のかけ算・わり算」の指導は難しい。
「難しい」の内容は，《説明を明証的につくれない》である。

明証的につくれないのは，数学の＜数は量の比＞を択らないようにしているためである。
＜数は量の比＞を択らないという無理をすることで，数学の過剰と数学の非在が合わさった指導法がつくられる。
数学の過剰と数学の非在が，「分数・小数のかけ算・わり算」の非明証性の内容である。

では＜数は量の比＞を択ることが問題の解決になるかというと，単純にそうはならない。
＜明証的＞イコール＜易しい＞ではないからである。
実際，数学は難しい科目であるが，それは＜明証的＞がむしろ＜難しい＞とイコールであることを示している。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

宮 下 英 明（みやした ひであき）

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

「数」の数学と学校数学 (4)

「数直線でかけ算･わり算」は, わかるのがおかしい

2012-04-16　更新 (テクストを２分割──１つを『学校数学の「かけ算･わり算」のとらえには，数学が必要』に)

2012-03-07　更新

2012-02-18　初版アップロード (サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp